

Основы Математического Моделирования

Физический факультет МГУ им. Ломоносова.

Боголюбов А. Н.

Глава I. Основные понятия и принципы математического моделирования.

§1. Математика и математическое моделирование	3
§2. Прямые и обратные задачи математического моделирования	5
§3. Универсальность математических моделей. Принцип аналогий	6
§4. Иерархия моделей	9

Глава II. Некоторые классические задачи математической физики.

§1. Задача с данными на характеристиках (задача Гурса)	12
§2. Общая задача Коши. Функция Римана	17
2.1. Функция Римана	17
2.2. Физический смысл функции Римана	25
2.2. Уравнения с постоянными коэффициентами	28
§3. Задача о промерзании (задача о фазовом переходе, задача Стефана)	31
3.1. Метод подобия	35
§4. Динамика сорбции газа	37
§5. Простейшие задачи для уравнения Шредингера	41
5.1. Уравнение Шредингера	41
5.2. Гармонический осциллятор	42
5.3. Ротатор	44
5.4. Движение электрона в кулоновском поле	46
5.5. Свойство полиномов Эрмита	52

Глава III. Математическое моделирование нелинейных объектов и процессов.

§1. Математические модели процессов нелинейной теплопроводности и горения	53
1.1. Краевые задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности	53
1.2. Решения с обострениями	57
§2. Математические модели теории нелинейных волн	62
2.1. Метод характеристик	62
2.2. Обобщенное решение. Условие на разрыве	65
2.3. Уравнение Кортевега-де Фриза и законы сохранения	69
2.4. Схема метода обратной задачи	70
2.4.1. Прямая и обратная задачи рассеяния	70
2.4.2. Решение задачи Коши	72
2.4.3. Схема построения быстроубывающих решений задачи Коши	74

Глава IV. Методы исследования математических моделей.

§1. Вариационные методы решения краевых задач и определения собственных значений	77
1.1. Принцип Дирихле	77
1.2. Задача о собственных значениях	79

§2. Некоторые алгоритмы проекционного метода	81
2.1. Общая схема алгоритмов	81
2.2. Метод Ритца	82
2.3. Метод Галёркина	85
2.4. Обобщенный метод моментов	86
2.5. Метод наименьших квадратов	87
§3. Метод конечных разностей	88
3.1. Основные понятия	88
3.2. Разностная задача для уравнения теплопроводности на отрезке	91
3.3. Метод прогонки	96
3.4. Экономичные разностные схемы. Схема переменных направлений	98
3.5. Консервативные однородные разностные схемы	100
3.5.1. Интегро-интерполяционный метод (ИИМ) – метод баланса	100
3.5.2. Метод конечных элементов (МКЭ) – проекционно-сеточный метод	102
§4. Асимптотические методы	105
4.1. Метод малого параметра	105
4.1.1. Регулярные возмущения	105
4.1.2. Сингулярные возмущения	108
4.2. Метод ВКБ (Венцеля, Крамерса, Бриллюэна)	113
4.3. Метод усреднения Крылова-Боголюбова	117
Глава V. Некоторые новые методы и объекты математического моделирования.	
§1. Фракталы и фрактальные структуры	126
1.1. Фракталы в математике	126
1.2. Размерность самоподобия	128
1.3. Фракталы в природе	129
1.4. Моделирование дендритов	130
1.5. Иллюстрации к параграфу	131
§2. Самоорганизация и образование структур. Синергетика	133
2.1. Диссипативные структуры	133
2.2. Модель брюсселятора	134

§1. Математика и математическое моделирование.

Основные этапы метода математического моделирования.

1. Создание качественной модели.

Выясняется характер законов и связей, действующих в системе. В зависимости от природы модели эти законы могут быть физическими, химическими, биологическими, экономическими.

Задача моделирования — выявить главные, характерные черты явления или процесса, его определяющие особенности.

Применительно к исследованию физических явлений создание качественной модели — это формулировка физических закономерностей явления или процесса на основании эксперимента.

2. Создание математической модели (постановка математической задачи).

Если математическая модель описывается некоторыми уравнениями, то такая модель называется детерминированной. Рассмотренные в курсе методов математической физики начально-краевые задачи являются примерами детерминированных дифференциальных моделей.

Если модель описывается некоторыми вероятностными законами, то такая модель называется стохастической.

1) Выделение существенных факторов.

Основной принцип: если в системе действует несколько факторов одного порядка значимости, то все они должны быть учтены, или все отброшены.

2) Выделение дополнительных условий (начальных, граничных, условий сопряжения и т.д.).

3. Изучение математической модели.

1) Математическое обоснование модели.

Исследование внутренней непротиворечивости модели.

Обоснование корректности дифференциальной модели. Доказательство теорем существования, единственности и устойчивости решения.

2) Качественное исследование модели. Выяснение поведения модели в крайних и предельных ситуациях.

3) Численное исследование модели.

а) Разработка алгоритма.

б) Разработка численных методов исследования модели

Разрабатываемые методы должны быть достаточно общими (пригодными для исследования математических моделей

достаточно широкого класса) и алгоритмичными (обеспечивающими автоматизацию вычислений).

Новое требование — возможность распараллеливания (использование кластерных вычислительных систем)

в) Создание и реализация программы.

Компьютерный эксперимент.

Лабораторный эксперимент	Компьютерный эксперимент
Образец	Математическая модель
Физический прибор	Программа
Калибровка	Тестирование программы
Измерения	Расчеты
Анализ данных	Анализ данных

По сравнению с лабораторным (натурным) экспериментом компьютерный эксперимент дешевле, безопасней, может проводиться в тех случаях, когда лабораторный эксперимент принципиально невозможен.

4. Получение результатов и их интерпретация.

Сопоставление полученных данных с результатами качественного анализа, натурного эксперимента и данными, полученными с помощью других численных алгоритмов.

Уточнение и модификация модели и методов ее исследования.

5. Использование полученных результатов.

Предсказание новых явлений и закономерностей.

§2. Прямые и обратные задачи математического моделирования.

1. Прямая задача: все параметры исследуемой системы известны и изучается поведение модели в различных условиях.

2. Обратные задачи:

а) Задача распознавания: определение параметров модели путем сопоставления наблюдаемых данных и результатов моделирования. По результатам наблюдений пытаются выяснить, какие процессы управляют поведением объекта, и находят определяющие параметры модели. В обратной задаче распознавания требуется определить значения параметров модели по известному поведению системы как целого.

Примеры задач распознавания:

- Задача электроразведки: определение подземных структур при помощи измерений на поверхности.
- Задача магнитной дефектоскопии: определение дефекта в детали, помещенной между полюсами магнита, по возмущению магнитного поля на поверхности детали.

б) Задача синтеза (задача математического проектирования): построение математических моделей систем и устройств, которые должны обладать заданными техническими характеристиками. В отличие от задач распознавания, заключающихся в определении параметров модели, соответствующей реальному состоянию системы, в задачах синтеза отсутствует требование единственности решения. Отсутствие единственности решения позволяет из нескольких возможных решений выбрать технически наиболее приемлемый результат.

Примеры задач синтеза:

- Синтез диаграммы направленности антенны: определение распределения токов, создающих заданную диаграмму направленности антенны.
- Синтез градиентных световодов: определение профиля функции диэлектрической проницаемости, при котором световод обладает заданными характеристиками.

3. Задача проектирования управляющих систем: особая область математического моделирования, связанная с автоматизированными информационными системами и автоматизированными системами управления.

§3. Универсальность математических моделей. Принцип аналогий.

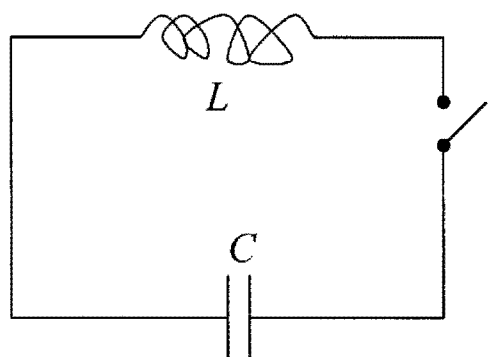
Универсальность математических моделей есть отражение принципа материального единства мира.

Математическая модель должна описывать не только отдельные конкретные явления или объекты, а достаточно широкий круг разнообразных явлений и объектов.

Одним из плодотворных подходов к моделированию сложных объектов является использование аналогий с уже изученными явлениями.

Процессы колебаний в объектах разной природы.

1. Колебательный электрический контур.



Сопротивление проводов считаем равным нулю.

$q(t)$ — заряд на обкладках конденсатора.

$v(t)$ — напряжение на обкладках конденсатора.

C — емкость конденсатора

L — индуктивность катушки

E — э.д.с. самоиндукции

i — ток

$$v(t) = Cq(t)$$

$$E = -L \frac{di}{dt}$$

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

$$\text{Закон Ома: } v(t) = -E(t) \Rightarrow$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} = -Cq \Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{C}{L} q = 0$$

2. Малые колебания при взаимодействии двух биологических популяций.

$N(t)$ — численность растительноядной популяции 1

$M(t)$ — численность плотоядной популяции 2

Пренебрегаем естественной смертностью популяции 1 и рождаемостью популяции 2.

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 M)N, & \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \\ \frac{dM}{dt} = (-\alpha_2 + \beta_2 N)M, & \alpha_2 > 0, \beta_2 > 0. \end{cases}$$

Система находится в равновесии, если

$$M_0 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad N_0 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \text{когда} \quad \frac{dN}{dt} = \frac{dM}{dt} = 0$$

Линеаризованная система ($n=N-N_0$, $m=M-M_0$):

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = -\beta_1 N_0 m \\ \frac{dm}{dt} = \beta_2 M_0 n \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2 n}{dt^2} + \alpha_1 \alpha_2 n = 0$$

3. Простейшая модель изменения зарплаты и занятости.

$p(t)$ — зарплата

$N(t)$ — число занятых работников

Равновесие рынка труда: за плату $p_0 > 0$ согласны работать $N_0 > 0$ человек.

Предполагается, что

- а) работодатель изменяет зарплату пропорционально отклонению численности занятых работников от равновесного;
- б) численность работников изменяется пропорционально изменению зарплаты относительно p_0 .

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\alpha_1(N - N_0), & \alpha_1 > 0, \\ \frac{dN}{dt} = \alpha_2(p - p_0), & \alpha_2 > 0 \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{d^2(p - p_0)}{dt^2} + \alpha_1\alpha_2(p - p_0) = 0.$$

§4. Иерархия моделей.

Принцип «от простого к сложному»: построение цепочки (иерархии) все более полных моделей, каждая из которых обобщает предыдущую, включая ее в качестве составного случая.

Модель многоступенчатой ракеты.

Пренебрегаем сопротивлением воздуха, гравитацией.

1) Одноступенчатая ракета.

$u=3\div 5$ км/с — скорость истечения продуктов сгорания топлива (относительно Земли)

$v(t)$ — скорость ракеты (относительно Земли)

$m(t)$ — масса ракеты

Закон сохранения импульса:

$$m(t)v(t) = m(t+dt)v(t+dt) - dm(v(t+\xi dt) - u)$$

$$m(t+dt) = m(t) + \frac{dm}{dt}dt + O(dt^2)$$

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -u \frac{d(\ln m)}{dt} \Rightarrow$$

$$v(t) = v_0 + u \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m(t)} \right)$$

$$v_0 = v(0); \quad m_0 = m(0)$$

Максимальная скорость при полном сгорании топлива (формула Циолковского):

$$v = u \ln \left(\frac{m_0}{m_p + m_s} \right)$$

m_p — полезная масса (масса спутника)

m_s — структурная масса (топливных баков, двигателей, систем управления ракетой и т.д.)

$$\lambda = \frac{m_s}{m_0 - m_p}$$

$$\lambda = 0,1$$

При $u = 3 \text{ км/с}$ $v = u \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 7 \text{ км/с}$
 $m_p = 0$

2) Многоступенчатая ракета.

m_i — общая масса i -й ступени

λm_i — структурная масса i -й ступени

$(1 - \lambda)m_i$ — масса топлива i -й ступени

λ, u — одинаковы для всех ступеней.

$$n = 3: \quad m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$$

Пусть израсходовано все топливо первой ступени. По формуле Циолковского скорость равна:

$$v_1 = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)$$

После отброса структурной массы λm_1 включается вторая ступень. Масса ракеты в этот момент $m_p + m_2 + m_3$. После выгорания топлива второй ступени скорость равна:

$$v_2 = v_1 + u \ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right),$$

а после отброса структурной массы λm_2 и включения двигателей третьей ступени равна

$$v_3 = v_2 + u \ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right),$$

При $n=3$ получаем

$$\frac{v_3}{u} = \ln \left\{ \left(\frac{\alpha_1}{1 + \lambda(\alpha_1 - 1)} \right) \left(\frac{\alpha_2}{1 + \lambda(\alpha_2 - 1)} \right) \left(\frac{\alpha_3}{1 + \lambda(\alpha_3 - 1)} \right) \right\},$$

где

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}, \quad \alpha_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}, \quad \alpha_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p}$$

Максимум достигается при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$.

$$\text{Для } m=3: \quad \alpha = \frac{1 - \lambda}{p - \lambda}, \quad p = \exp\left(-\frac{v_3}{3u}\right),$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \alpha^3 = \frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1 - \lambda}{p - \lambda} \right)^3$$

Для n ступеней:

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1 - \lambda}{p - \lambda} \right)^n, \quad p = \exp\left(-\frac{v_n}{nu}\right)$$

При $v_n = 10,5 \text{ км/с}$; $\lambda = 0,1$ получаем

$$n = 2 \quad m_0 = 149m_p$$

$$n = 3 \quad m_0 = 77m_p$$

$$n = 4 \quad m_0 = 65m_p$$

§1 Задача с данными на характеристиках (задача Гурса).

Простейшая задача Гурса

$$u_{xy} = f(x, y), \quad x > 0, \quad y > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(0, y) = \varphi_2(y), \quad (2)$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = u(0, 0). \quad (3)$$

Пусть решение задачи (1)-(3) существует. Поучим его явное представление через входные данные. Проинтегрируем (1) по прямоугольнику $\mathfrak{D} = \{0 < \xi < x, 0 < \eta < y\}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}} u_{xy} \, ds &= \int_0^y \int_0^x u_{\xi\eta} \, d\xi d\eta = \\ &= u(x, y) - u(x, 0) - u(y, 0) + u(0, 0) = \\ &= u(x, y) - \varphi_1(x) - \varphi_1(y) + \varphi_1(0), \end{aligned}$$

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) \, d\xi d\eta. \quad (4)$$

Из формулы (4) следует единственность решения задачи (1)-(3). В предположении дифференцируемости функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ и непрерывности функции $f(x, y)$ из формулы (4) следует существование решения.

Рассмотрим общую задачу:

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad x > 0, \quad y > 0, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(0, y) = \varphi_2(y), \quad (6)$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = u(0, 0), \quad (7)$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — гладкие функции.

Обозначим

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = f - au_x - bu_y - cu.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_{\mathfrak{D}} F d\xi d\eta = \\ &= \int_0^y \int_0^x F d\xi d\eta + \Phi(x, y), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\Phi(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0).$$

Введем интегро-дифференциальный оператор A :

$$A[u] = \int_0^y \int_0^x F d\xi d\eta.$$

Уравнение (8) запишем в виде

$$u = A[u] + \Phi \quad (9)$$

интегро-дифференциального уравнения Вольтерра. Метод последовательных приближений:

$$u_n = A[u_{n-1}] + \Phi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

u_0 — задано.

Положим $u_0(x, y) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \Phi(x, y) \\ u_n &= u_1 - \int_0^y \int_0^x \left\{ a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + cu_{n-1} \right\} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) следует:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} - \int_0^y \left\{ a(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) u_{n-1} \right\} d\eta, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} - \int_0^x \left\{ a(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y) u_{n-1} \right\} d\xi.\end{aligned}\quad (12)$$

Докажем равномерную сходимость последовательностей

$$\{u_n(x, y)\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right\}.$$

Пусть $z_n = u_{n+1} - u_n$. Из (11), (12) следует:

$$\begin{aligned}z_n(x, y) &= - \int_0^y \int_0^x \left\{ a(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) z_{n-1} \right\} d\xi d\eta, \\ \frac{\partial z_n}{\partial x}(x, y) &= - \int_0^y \left\{ a(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) z_{n-1} \right\} d\eta, \\ \frac{\partial z_n}{\partial y}(x, y) &= - \int_0^x \left\{ a(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y) z_{n-1} \right\} d\xi.\end{aligned}\quad (13)$$

Предположим, что в квадрате $G = \{0 < x, y < L\}$

$$\begin{aligned}|a(x, y)| &\leq M, \quad |b(x, y)| \leq M, \quad |c(x, y)| \leq M, \\ |z_0| &\leq H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial x} \right| \leq H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial y} \right| \leq H,\end{aligned}\quad (14)$$

где $M > 0$, $H > 0$ — положительные константы.

Из (13), (14) следуют мажорантные оценки:

$$\begin{aligned}|z_1| &\leq 3HMxy \leq 3HM \frac{(x+y)^2}{2!}, \\ \left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| &\leq 3HMy \leq 3HM(x+y), \\ \left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| &\leq 3HMx \leq 3HM(x+y).\end{aligned}$$

По индукции: для любого $n \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned} |z_n| &\leq 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}, \\ \left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| &\leq 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!}, \\ \left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| &\leq 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!}, \end{aligned}$$

где $K = L + 2$.

Так как $(x, y) \in G$

$$\begin{aligned} |z_n| &\leq \frac{3H}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \\ \left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| &\leq \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^n}{n!}, \\ \left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| &\leq \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^n}{n!}. \end{aligned} \tag{15}$$

В правой части (15) с точностью до множителей пропорциональности стоят общие члены разложения $\exp(2KLM)$. Следовательно, последовательность функций

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + z_1 + \dots + z_{n-1}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} \end{aligned}$$

равномерно сходятся к предельным функциям $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$:

$$u(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y), \quad v(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}, \quad w(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}.$$

Перейдем в формулах (11), (12) к пределу $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} u &= u_1(x, y) - \int_0^y \int_0^x \{av + bw + c(\xi, \eta)u\} d\xi d\eta, \\ v &= \frac{\partial u_1}{\partial x} - \int_0^y \{a(x, \eta)v + b(x, \eta)w + c(x, \eta)u\} d\eta, \\ w &= \frac{\partial u_1}{\partial y} - \int_0^x \{a(\xi, y)v + b(\xi, y)w + c(\xi, y)u\} d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда следует, что $v = u_x$, $w = u_y$ и $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (9). Непосредственным дифференцированием устанавливается, что $u(x, y)$ удовлетворяет (5). Удовлетворение условиям (6) следует из (7), (9) и вида $\Phi(x, y)$.

Доказательство единственности решения задачи (5)-(7) (от противного):

Пусть $u_1(x, y) \neq u_2(x, y)$ — два решения. Рассмотрим $U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$:

$$U(x, y) = \int_0^x \int_0^y \{aU_\xi + bU_\eta + cU\} d\xi d\eta.$$

Из (14) следует

$$|U| \leq H_1, \quad |U_x| \leq H_1, \quad |U_y| \leq H_1.$$

При $(x, y) \in G$ для любого n

$$|U| \leq \frac{3H_1}{K^2M} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что

$$U(x, y) \equiv 0 \implies u_1(x, y) \equiv u_2(x, y)$$

— противоречие.

§2. Общая задача Коши. Функция Римана.

1° Функция Римана.

Рассмотрим задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xy} = f(x, y), (x, y) \in D^+, \quad (1) \\ u(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in C, \quad (2) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \psi(x, y), (x, y) \in C. \quad (3) \end{array} \right.$$

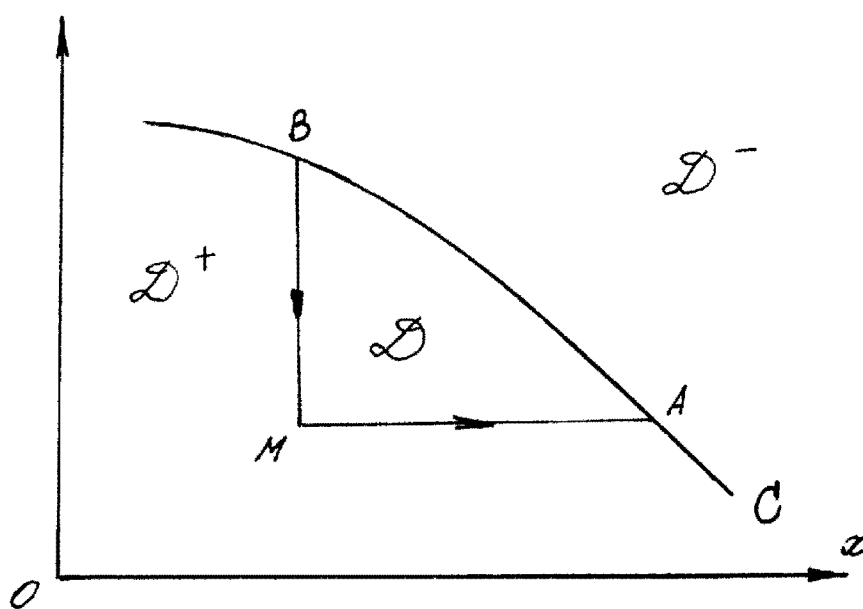
Кривая C - бесконечно гладкая кривая, делящая плоскость (x, y) на две криволинейные полуплоскости D^+ и D^- и удовлетворяющая условиям:

а) кривая C не является характеристикой уравнения (1);

б) любая характеристика уравнения (1) пересекает кривую C только один раз.

В формуле (3) $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по нормали к кривой C , направленная внутрь области D^+ .

Построим формулу, выражающую решение задачи (1)-(3) в любой точке M области D^+ .



Рассмотрим возвращение

$$v u_{xy} - u v_{xy} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}, \quad (4)$$

где

$$P[u, v] = v_x u - v u_x$$

$$Q[u, v] = v u_y - v_y u \quad (5)$$

Формула Грина:

$$\begin{aligned} \int_D (v u_{xy} - u v_{xy}) dx dy = \\ = \frac{1}{2} \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{2} \int_I P dx + Q dy, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\bar{D} = DU I$.

Рассмотрим интеграл вдоль характеристик AM и BM :

$$\int_M^A \mathcal{P} dx = \int_M^A (v_x u - \underline{v u_x}) dx =$$

$$= (vu)_M - (vu)_A + 2 \int_M^A v_x u dx \quad (7)$$

$$\int_B^M \mathcal{Q} dy = \int_B^M (\underline{u_y v} - u v_y) dy =$$

$$= (vu)_M - (vu)_B - 2 \int_B^M u v_y dy \quad (8)$$

$$(6) - (8) \Rightarrow$$

$$\int_D (v u_{xy} - u v_{xy}) dx dy =$$

$$= (vu)_M - \frac{(vu)_A + (vu)_B}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_A^B \mathcal{P} dx + \mathcal{Q} dy +$$

$$+ \int_M^A v_x u dx - \int_B^M u v_y dy \quad (9)$$

Пусть $u(x, y)$ - решение задачи (1)-(3), а $v(x, y)$ - решение задачи (10) с данными на характеристике (задачи Гурса):

$$\begin{cases} u_{xy} = 0, & (x, y) \in D, \\ v_x|_{AM} = 0, \\ v_y|_{BM} = 0, \\ v(M) = 1 \end{cases} \quad (10)$$

Функция $v \equiv 1$ в области D удовлетворяет всем условиям задачи (10). Функция v , удовлетворяющая условиям (10), представляет собой частный случай функции Римана.

Подставим $v \equiv 1$ в (9) $\Rightarrow$

$$\int_D u_{xy} dx dy = u(M) - \frac{u(A) + u(B)}{2} + \frac{1}{2} \int_A^B (-u_x dx + u_y dy)$$

(1)-(3) $\Rightarrow$

$$u(M) = \frac{f(A) + f(B)}{2} + \frac{1}{2} \int_{AB} u_x dx - u_y dy + \int_D f(x, y) dx dy \quad (11)$$

На дуге AB выражения

$$u_x = u_\sigma \cos(\hat{\sigma}, x) + u_n \cos(\hat{n}, x)$$

$$u_y = u_\sigma \sin(\hat{\sigma}, x) + u_n \sin(\hat{n}, x)$$

известны. Формула (11) дает решение задачи (1)-(3) при вводе данных.

Замечание. Из формул (11) следует:

- 1) теорема единственности решения задачи (1)-(3),
- 2) теорема устойчивости решения задачи (1)-(3),
- 3) теорема существования решения задачи (1)-(3)
(при выполнении условий гладкости входных данных).

Рассмотрим более общую задачу:

$$\left\{ \begin{aligned} L[u] &\equiv u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y) \\ &(x, y) \in D^+, \end{aligned} \right. \quad (12)$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in C, \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in C. \quad (14)$$

Определение. Два дифференциальных оператора L и K называются сопряженными, если разность

$$v L[u] - u K[v]$$

является разностью первых частных производных по x и y от некоторых выражений P и Q :

$$v L[u] - u K[v] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right), \quad (15)$$

причем P не содержит производной u_y , а Q не содержит производной u_x .

Сопреженным к оператору L будет оператор K :

$$K[v] \equiv v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv \quad (16)$$

Для операторов L и K выполняются (15) при

$$P[u, v] = uv_x - u_xv - 2bv, \quad (17)$$

$$Q[u, v] = v u_y - v_y u + 2av.$$

Формула Грина:

$$\begin{aligned} \int_D \{v L[u] - u K[v]\} dx dy &= \frac{1}{2} \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} P dx + Q dy = \frac{1}{2} \int_M^A P dx + \frac{1}{2} \int_{AB} P dx + Q dy + \frac{1}{2} \int_B^M Q dy \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая по частям:

$$\int_M^A P dx = u(M)v(M) - u(A)v(A) + 2 \int_M^A \tilde{P}[v] u dx, \quad (19)$$

$$\int_B^M Q dy = u(M)v(M) - u(B)v(B) - 2 \int_B^M \tilde{Q}[v] u dx,$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad \tilde{P}[v] &= v_x - bv, \\ \tilde{Q}[v] &= v_y - av. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим задачу с данными на характеристиках (задачу Гурса):

$$\begin{cases} K[v] = 0 & \text{в } D, \\ \tilde{P}[v] = 0 & \text{на } AM, \\ \tilde{Q}[v] = 0 & \text{на } MB, \\ v|_M = 1 \end{cases} \quad (21)$$

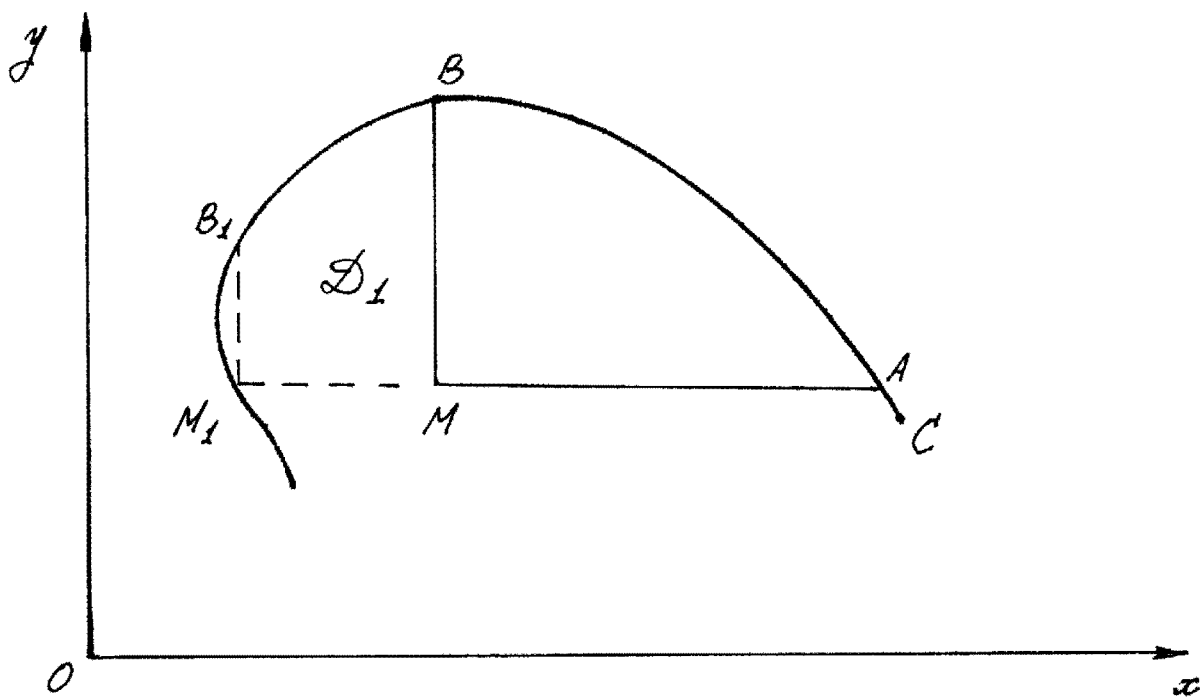
Можно показать, что решение задачи (21) всегда существует. Оно называется функцией Римана. Функции $v(M, M_1)$ удовлетворяют по координатам точки M_1 задаче (21) и зависят от точки M как от параметра.

$$(18) - (21), (12) \Rightarrow$$

$$u(M) = \frac{(\mathcal{P}v)_A + (\mathcal{P}v)_B}{2} + \int_D v(M, M_1) f(M_1) d\sigma_1 - \frac{1}{2} \int_{AB} P dx + Q dy \quad (22)$$

Интеграл по AB легко вычисляется, поскольку функции $v, \mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ известны.

Замечание. Любая характеристика уравнения (12) должна пересекать кривую S не более одного раза.



Если характеристика пересекает кривую C в двух точках A и M_1 , то значение $u(M_1)$ не может быть задано произвольно, а определится по формуле:

$$u(M_1) = \frac{u(A)v(A) + u(B_1)v(B_1)}{2} + \int_{D_1} v f dx dy - \frac{1}{2} \int_A^{B_1} P dx + Q dy \quad (23)$$

с начальными значениями, заданными на дуге AB_1 и функцией $f(x, y)$, заданной в области D_1 , - криволинейном треугольнике M_1B_1A .

2°. Физический смысл функции Римана.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \Delta[u] = f, \\ u|_c = 0, \\ u_n|_c = 0. \end{cases}$$

(22) $\Rightarrow$

$$u(M) = \int_D v(M, M') f(M') d\sigma_{M'} \quad (24)$$

Пусть $f_\varepsilon(M)$ - локальная функция точки M_1 :

$f_\varepsilon(M) = 0$, $M \notin S_{M_1}^\varepsilon$, где $S_{M_1}^\varepsilon$ - окрестность точки M_1 .

Условие нормировки:

$$\int_{S_{M_1}^\varepsilon} f_\varepsilon(M') d\sigma_{M'} = 1, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (25)$$

(24) $\Rightarrow$

$$u_\varepsilon(M) = \int_{S_{M_1}^\varepsilon} v(M, M') f_\varepsilon(M') d\sigma_{M'} = \quad (26)$$

$$= v(M, M^*) \int_{S_{M_1}^\varepsilon} f_\varepsilon(M') d\sigma_{M'} = v(M, M^*),$$

где $M^* \in S_{M_1}^\varepsilon$.

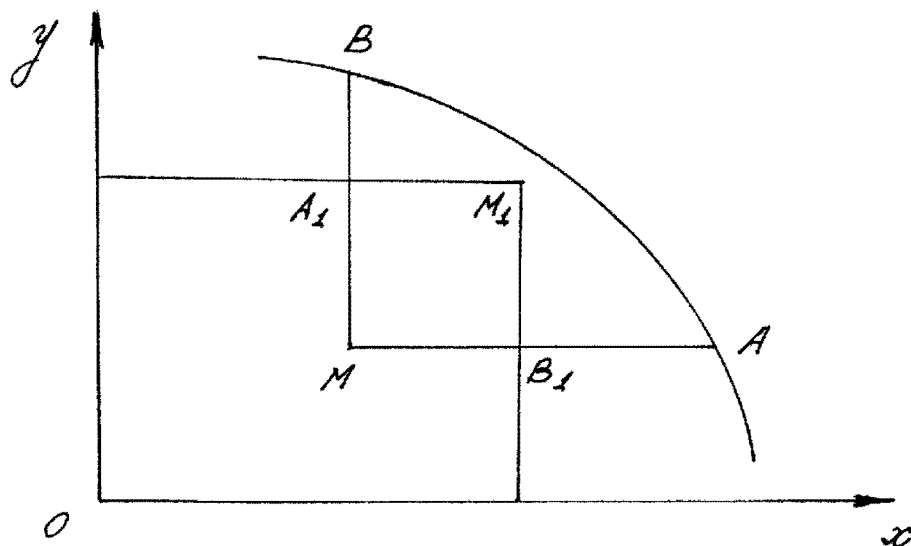
(26) $\Rightarrow$

$$u_0(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(M) = v(M, M_1) \Rightarrow$$

$v(M, M_1)$ - функция влияния единичного источника, приложенного в точке M_1 .

Рассмотрим функцию $u = u(M, M_1)$, зависящую от точки M_1 как от параметра и удовлетворяющую по координатам точки M следующей задаче Гурса:

$$\begin{cases} L[u] = 0, \\ u_x + v u = 0 \text{ на } M_1 A_1, \\ u_y + a u = 0 \text{ на } B_1 M_1, \\ u|_{M_1} = 1. \end{cases} \quad (27)$$



Задача (27) полностью определяет функцию u в четырёхугольнике $MB_1M_1A_1$, образованном отрезками характеристик.

$$(18), (21), (27) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{MB_1M_1A_1} (v \mathcal{L}[u] - u \mathcal{K}[v]) dx dy = \\
 & = \frac{1}{2} \int_{M_1}^{B_1} \mathcal{P} dx + \frac{1}{2} \int_{A_1}^M \mathcal{Q} dy + \frac{1}{2} \int_{M_1}^{A_1} (u v_x - v u_x - 2buv) dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{B_1}^{M_1} (v u_y - u v_y + 2a uv) dy = \\
 & = (uv)_M - (uv)_{M_1} = 0.
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\text{Мак как } v \Big|_M = 1, u \Big|_{M_1} = 1, \text{ то}$$

$$u(M, M_1) = v(M, M_1) \tag{29}$$

3. Уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Функция Римана для уравнения
 $uxy + cu = 0.$

Так как оператор $L[u] \equiv uxy + cu \equiv K[u]$ - самосопряженный, то (21) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} vxy + cv = 0 & \text{в } D, \\ v_x = 0 & \text{на } M_0A, \\ v_y = 0 & \text{на } BM_0, \\ v|_{M_0} = 1 \end{cases} \quad (30)$$

или

$$\begin{cases} vxy + cv = 0 & \text{в } D, \\ v = 1 & \text{на } M_0A, \\ v = 1 & \text{на } BM_0 \end{cases} \quad (31)$$

Ищем функцию Римана в виде $v = v(z)$, где $z = \sqrt{(x-x_0)(y-y_0)}$, $M_0 = \{x_0, y_0\}$, $M = \{x, y\}$.

$$(31) \Rightarrow v(0) = 1 \quad (32)$$

$$v_x = v' \frac{y-y_0}{2z}, \quad v_{xy} = \frac{1}{4} v'' + \frac{1}{4z} v' \Rightarrow$$

$$v'' + \frac{1}{z} v' + 4cv = 0 \quad (33)$$

(32), (33) $\Rightarrow$

$$V(M, M_0) = V(x, y, x_0, y_0) = I_0(2\sqrt{c(x-x_0)(y-y_0)}) \quad (34)$$

в) Задача Коши для уравнения колебаний.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{zz} + a u_t + b u_z + g u = 0, & -\infty < z < \infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(z), & -\infty < z < \infty \end{cases} \quad (35)$$

Замена:

$$u = U e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} \quad (36)$$

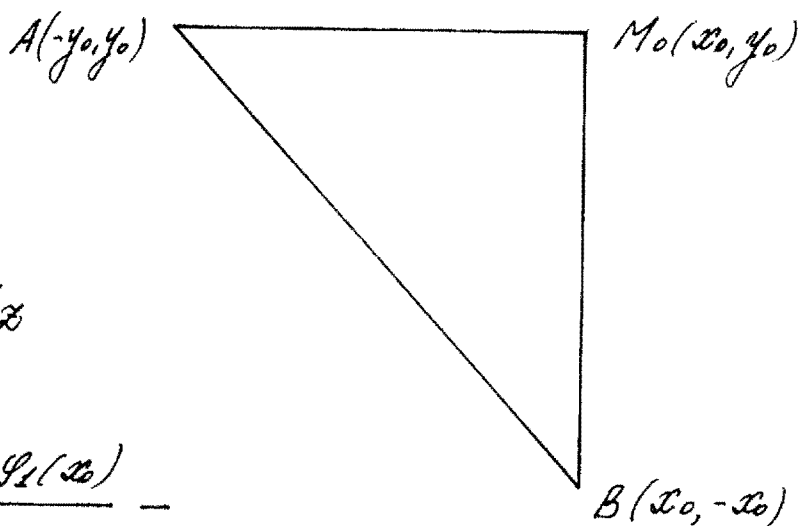
(35), (36) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{zz} + c U = 0, & -\infty < z < \infty, t > 0, \\ U|_{t=0} = \varphi(z) e^{-\frac{b}{2}z} = \varphi_1(z), \\ U_t|_{t=0} = (\psi(z) + \frac{a}{2}\varphi(z)) e^{-\frac{b}{2}z} = \psi_1(z), \\ c = -\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + g. & -\infty < z < \infty \end{cases} \quad (37)$$

Перейдем к переменным x и y :

$$x = t + z, \quad y = t - z \Rightarrow t = \frac{x+y}{2}, \quad z = \frac{x-y}{2} \quad (38)$$

$$\begin{cases} U_{xy} + \frac{c}{4} U = 0, \\ U|_{x+y=0} = \varphi_1\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ (U_x + U_y)|_{x+y=0} = \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{cases} \quad (39)$$



$$t=0 \Rightarrow y=-x$$

$$dx = d\tilde{x}, \quad dy = -d\tilde{x}$$

$$(22) \Rightarrow U(x_0, y_0) = \frac{I_1(-y_0) + I_1(x_0)}{2} -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{AB} (v U_y - U v_y) dy + (U v_x - U_x v) dx \quad (40)$$

$$U_x = \frac{1}{2} (U_t + U_z), \quad U_y = \frac{1}{2} (U_t - U_z) \quad (41)$$

$$(41), (40), (34) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} U(x_0, t_0) = & \frac{I_1(x_0+t_0) + I_1(x_0-t_0)}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} \left\{ \psi_1(\tilde{x}) I_0(\sqrt{C} \sqrt{t_0^2 - (\tilde{x} - x_0)^2}) + \right. \\ & \left. + I_1(\tilde{x}) \frac{I_1(\sqrt{C} \sqrt{t_0^2 - (\tilde{x} - x_0)^2})}{\sqrt{t_0^2 - (\tilde{x} - x_0)^2}} \sqrt{C} t_0 \right\} d\tilde{x} \end{aligned} \quad (42)$$

Пусть $C=0$ из (42) получаем формулу Даламбера:

$$U(x_0, t_0) = \frac{I_1(x_0+t_0) + I_1(x_0-t_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} \psi_1(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (43)$$

§3. Задача о промерзании (задача о фазовом переходе, задача Стефана).

Положительным раздвиг является
мелкость $x = \xi(t)$.

$$t \rightarrow t + \Delta t$$

$$\xi = x_1 \rightarrow \xi = x_2 = x_1 + \Delta \xi$$

Затвердевает масса $\rho \Delta \xi$ (или растапливается при $\Delta \xi < 0$), выделяется количество тепла $\lambda \rho \Delta \xi$.

Тепловой баланс:

$$\left[\kappa_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x_1} - \kappa_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \Big|_{x_2} \right] \Delta t = \lambda \rho \Delta \xi,$$

где κ_1 и κ_2 - коэффициенты теплопроводности первой и второй фаз, λ - скрытая теплота плавления.

При $\Delta t \rightarrow 0$ получим условие на границе раздела:

$$\kappa_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - \kappa_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = \lambda \rho \frac{d\xi}{dt}$$

$\Delta \xi > 0$, $\frac{d\xi}{dt} > 0$ - затвердевание; $\Delta \xi < 0$, $\frac{d\xi}{dt} < 0$ - плавление.

Процесс замораживания воды - температура фазового перехода равна нулю.

$$t = 0 \quad T > 0$$

$$x = 0 \quad T_1 < 0$$

$$x = \xi - \text{граница промерзания}$$

Задача о промерзании (задача Стефана):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad \xi < x < \infty \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = T_1, \quad x = 0, \\ u_2 = T, \quad t = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$u_1 = u_2 = 0, \quad x = \xi, \quad (3)$$

$$\kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - \kappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = \lambda \rho \frac{d\xi}{dt}, \quad (4)$$

где κ_1, a_1^2 и κ_2, a_2^2 - коэффициенты теплопроводности и температуропроводности в твердой и жидкой фазе.

Построение решения задачи (1)-(4).

Ищем решение в виде:

$$u_1 = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad u_2 = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right),$$

$$\text{где } \Phi(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-z^2} dz - \text{функция ошибок.}$$

$$\text{Из (2), (3)} \Rightarrow A_1 = T_1, \quad A_2 + B_2 = T,$$

$$A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_1\sqrt{t}}\right) = 0, \quad (5)$$

$$A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_2\sqrt{t}}\right) = 0.$$

Условие (5) выполняется при любом $t \Rightarrow$

$$\xi = \alpha \sqrt{t}, \quad (6)$$

где α - некоторая постоянная.

Отсюда получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = T_1 \quad B_1 = -\frac{T_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} \\ A_2 = -\frac{T \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)} \quad B_2 = \frac{T}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)} \end{array} \right. \quad (7)$$

Два вырожденных λ из (4) $\Rightarrow$

$$\frac{\kappa_1 T_1 e^{-\frac{\lambda^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi(\frac{\lambda}{2a_1})} + \frac{\kappa_2 T e^{-\frac{\lambda^2}{4a_2^2}}}{a_2 \{1 - \Phi(\frac{\lambda}{2a_2})\}} = -1 \rho \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (8)$$

Пусть $T=0$

$$\begin{cases} A_2 = 0 & B_2 = 0 \\ A_1 = T_1 & B_1 = -\frac{T_1}{\Phi(\frac{\lambda}{2a_1})} \end{cases} \quad (9)$$

$$u \quad \frac{\kappa_1 T_1 e^{-\frac{\lambda^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi(\frac{\lambda}{2a_1})} = -1 \rho \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (10)$$

$$\text{Положим } \beta = \frac{\lambda}{2a_1}, \quad D = \frac{1 \rho a_1^2}{\kappa_1 T_1} < 0,$$

$$\text{из (10)} \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta^2}}{\Phi(\beta)} = -D\beta$$

Метод подобия.

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (11)$$

Уравнение (11) не изменяется при преобразовании переменных

$$x' = \kappa x, \quad t' = \kappa^2 t \Rightarrow \quad (12)$$

$$u(x, t) = u(\kappa x, \kappa^2 t) \quad (13)$$

Положим:

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow u(x, t) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{4}\right) =$$

$$= f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = f(\xi), \quad (14)$$

где $\xi = \frac{x}{2\sqrt{t}} \quad (15)$

$$(14), (15) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4t} \frac{d^2 f}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x}{4t^{3/2}} \frac{df}{d\xi} = -\frac{\xi}{2t} \frac{df}{d\xi} \quad (16)$$

$$(11), (16) \Rightarrow$$

$$a^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} = -2\xi \frac{df}{d\xi} \quad (17)$$

$$(17) \Rightarrow$$

$$f(\xi) = A + \bar{B} \int_0^\xi e^{-\frac{\omega^2}{a^2}} d\omega = \quad (18)$$

$$= A + B \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\xi}{a}} e^{-\zeta^2} d\zeta = A + B \Phi\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

$$a^2 \frac{f''}{f'} = -2\xi \Rightarrow f' = \bar{B} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}}$$

Движение нулевой изотермы описывается уравнением $\xi = \alpha \sqrt{t}$, где $f(\frac{\alpha}{2}) = 0$.

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} a_1 \frac{d^2 f_1}{d\mathbb{Z}^2} = -2\mathbb{Z} \frac{df_1}{d\mathbb{Z}}, & 0 < \mathbb{Z} < \frac{\alpha}{2}, \\ a_2 \frac{d^2 f_2}{d\mathbb{Z}^2} = -2\mathbb{Z} \frac{df_2}{d\mathbb{Z}}, & \frac{\alpha}{2} < \mathbb{Z} < \infty \end{cases} \quad (19)$$

$$(2) \Rightarrow f_1(0) = T_1, \quad f_2(\infty) = T \quad (20)$$

$$(3) \Rightarrow f_1\left(\frac{\alpha}{2}\right) = f_2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \quad (21)$$

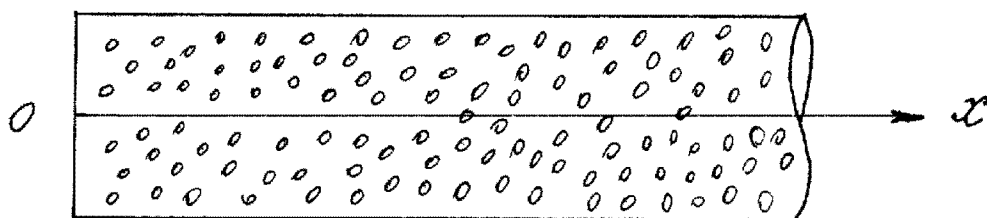
$$(4) \Rightarrow \kappa_1 f_1'\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \kappa_2 f_2'\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \gamma \alpha \quad (22)$$

Ищем решение в виде

$$f(\mathbb{Z}) = \begin{cases} f_1(\mathbb{Z}) = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\mathbb{Z}}{a_1}\right), & 0 < \mathbb{Z} < \frac{\alpha}{2} \\ f_2(\mathbb{Z}) = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\mathbb{Z}}{a_2}\right), & \frac{\alpha}{2} < \mathbb{Z} < \infty \end{cases} \quad (23)$$

Из условий (20) (23) получаем формулы (7), (8).

§4. Динамика сорбции газа.



$a(x, t)$ - количество газа, поглощенного единицей объема сорбента,

$u(x, t)$ - концентрация газа, находящегося в порах сорбента в слое x , v - скорость газа.

Уравнение баланса вещества для слоя сорбента от x_1 до x_2 в течение промежутка времени от t_1 до t_2 :

$$\{v u|_{x_1} - v u|_{x_2}\} S \Delta t = \{(a+u)|_{t_2} - (a+u)|_{t_1}\} S \Delta x \quad (1)$$

$$\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} (a + u) \quad (2)$$

Уравнение кинетики сорбции:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - y), \quad (3)$$

где β - кинетический коэффициент, y - концентрация газа, находящегося в равновесии с сорбированным количеством газа.

Уотерша сорбции:

$$a = f(y). \quad (4)$$

Уотерша Ленгмюра:

$$f(y) = \frac{y u_0}{y(u_0 + py)} \quad (5)$$

Уотерша Генри (справедлива в области малых концентраций):

$$a = \frac{1}{\mu} y, \quad (6)$$

где $\frac{1}{\mu}$ - коэффициент Генри.

В этом случае приходим к задаче:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - ya) \quad (8)$$

$$a(x, 0) = 0, \quad (9)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (10)$$

$$u(0, t) = u_0, \quad (11)$$

где u_0 - концентрация газа на входе.

$\frac{\partial u}{\partial t}$ - расход газа на повышение свободной концентрации в порах сорбента,

$\frac{\partial a}{\partial t}$ - расход газа на увеличение сорбированного количества газа.

Пренебрегаем производной $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\gamma \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial t} \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - \gamma a) \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a(x, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = u_0. \end{array} \right. \quad (15)$$

$$(12), (13) \Rightarrow -\gamma u_{xt} = \beta u_t - \beta \gamma a_t = \beta u_t + \beta \gamma u_x \Rightarrow$$

$$u_{xt} + \frac{\beta}{\gamma} u_t + \beta \gamma u_x = 0 \quad (16)$$

$$(12), (13) \Rightarrow -\gamma u_x(x, 0) = \beta u(x, 0), \quad u(0, 0) = u_0 \Rightarrow$$

$$u(x, 0) = u_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma} x} \quad (17)$$

Для нахождения функции $u(x, t)$ получаем задачу (16), (17), (15).

$$\begin{cases} u_{xt} + \frac{\beta}{\gamma} u_t + \beta \gamma u_x = 0 & (16) \\ u(x, 0) = u_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} x} & (17) \\ u(0, t) = u_0 & (15) \end{cases}$$

Так как характеристиками уравнения (16) являются прямые $x = \text{const}$, $t = \text{const}$, то дополнительные условия (17), (15) представляют значения искомой функции $u(x, t)$ на характеристиках.

Аналогично ставится задача для функции $a(x, t)$:

$$\begin{cases} a_{xt} + \frac{\beta}{\gamma} a_t + \beta \gamma a_x = 0 & (18) \\ a(x, 0) = 0 & (14) \\ a(0, t) = \frac{u_0}{\gamma} (1 - e^{-\beta \gamma t}) & (19) \end{cases}$$

Решение уравнения (16) имеет вид:

$$u(x_1, t_1) = u_0 e^{-x_1} \left\{ e^{-t_1} I_0(2\sqrt{x_1 t_1}) + \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1 t_1} e^{-\frac{\tau}{x_1}} I_0(2\sqrt{\tau}) d\tau \right\}, \quad (20)$$

где $x_1 = \frac{\beta x}{\gamma}$, $t_1 = \frac{\beta t}{\gamma}$, I_0 - функция Бесселя.

Выполнение условий (17) и (15) легко проверяется.

§5. Простейшие задачи для уравнения Шредингера.

1. Уравнение Шредингера.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi \quad (1)$$

$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ эрг·с - постоянная Планка,

μ - масса частицы,

U - потенциальная энергия частицы в силовом поле,

$\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ - волновая функция.

Если $U = U(x, y, z)$, то возможны стационарные соотношения с заданным значением энергии, то есть существуют решения вида

$$\Psi = \Psi^0(x, y, z) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}, \quad (2)$$

где E - общая энергия частицы. Подставляя (2) в (1) получаем уравнение Шредингера, в котором E играет роль собственного значения

$$\Delta \Psi^0 + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - U) \Psi^0 = 0. \quad (3)$$

В дальнейшем вместо Ψ^0 будем писать Ψ .

В случае отсутствия силового поля ($U=0$).

$$\Delta \Psi + \frac{2\mu E}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (4)$$

Нормировка.

$$\int |\Psi|^2 dx dy dz = 1 \quad (5)$$

2. Гармонический осциллятор.

Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - U)\psi = 0, \quad (6)$$

где $U = \frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2$, ω_0 - собственная частота (циклическая) осциллятора.

Задача: определить стационарные состояния, т.е. спектра соответствующих значений энергии E и соответствующих соответствующих функций ψ из уравнения

$$\psi'' + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - \frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2 \right) \psi = 0, \quad (7)$$

$-\infty < x < \infty$

при дополнительном условии нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 1. \quad (8)$$

Обозначения:

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega_0}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}}, \quad \xi = \frac{x}{x_0} \Rightarrow \quad (9)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi = 0 \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 d\xi = \frac{1}{x_0} \quad (11)$$

Замена: $\psi(\xi) = y(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \Rightarrow$

$$\frac{d}{d\xi} \left(e^{-\xi^2} \frac{dy}{d\xi} \right) + \tilde{\lambda} e^{-\xi^2} y = 0, \quad (12)$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda - 1$.

$$y(\xi) = H_n(\xi), \quad \tilde{\lambda} = 2n \Rightarrow \lambda = 2n + 1$$

$$\psi_n(\xi) = C_n H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) d\xi = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

$$(11) \Rightarrow \frac{1}{x_0} = C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) d\xi = C_n^2 2^n n! \sqrt{\pi} \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \Rightarrow$$

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \cdot \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

$$\lambda_n = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

n - малое квантовое число

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \quad (13)$$

$$E_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$$

3°. Ротатор.

Уравнение Шредингера для ротатора:

$$\Delta \psi + \frac{2M}{\hbar^2} E \psi = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2M}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad (15)$$

$$\Delta_{\theta, \varphi} \psi + \lambda \psi = 0 \quad (16)$$

$$\lambda = \frac{2I}{\hbar^2} E, \quad (17)$$

где $I = \mu r^2$ - момент инерции.

$$\begin{cases} \Delta_{\theta, \varphi} \psi + \lambda \psi = 0 \\ |\psi(0)| < \infty, |\psi(x)| < \infty \end{cases} \quad (18)$$

Условие нормировки:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\Psi|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 1 \quad (19)$$

Решение задачи (18), (19):

$$\Psi_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(\ell+1)(\ell-m)!}{2\epsilon_m \pi (\ell+m)!}} \cdot Y_{\ell}^{(m)}(\theta, \varphi), \quad (20)$$

$$\epsilon_m = \begin{cases} \ell, & m=0, \\ 1, & m \neq 0, \end{cases}$$

$$Y_{\ell}^{(m)}(\theta, \varphi) = P_{\ell}^{(m)}(\cos \theta) \begin{cases} \cos m \varphi, \\ \sin m \varphi, \end{cases} \quad (21)$$

$$(m = 0, 1, \dots, \ell; \ell = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\lambda_{\ell} = \ell(\ell+1), \quad (22)$$

$$(\ell = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(17), (22) \Rightarrow$$

$$E_{\ell, m} = \ell(\ell+1) \frac{\hbar^2}{2I} \quad (23)$$

$$(\ell = 0, 1, 2, \dots)$$

4°. Движение электрона в кулоновом поле.

В атоме водорода электрон находится в кулоновом электростатическом поле ядра (протона).

Потенциальная энергия $U(x, y, z)$ равна:

$$U = - \frac{e^2}{r}, \quad (24)$$

где r - расстояние от электрона до ядра, $-e$ - заряд электрона, $+e$ - заряд ядра.

Уравнение Шредингера:

$$\Delta \psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0, \quad (25)$$

условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1 \quad (26)$$

Введём сферическую систему координат с началом в ядре:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} \psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0 \quad (27)$$

Ищем решение в виде:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \chi(r) Y_e^{(m)}(\theta, \varphi) \quad (28)$$

$$\frac{d^2 \chi}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\chi}{dz} + \left\{ \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{z} \right) - \frac{l(l+1)}{z^2} \right\} \chi = 0 \quad (29)$$

Введём в качестве длины волны
 $a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$, в качестве энергии - вели-
 чины $E_0 = \frac{\mu e^4}{\hbar^2} = \frac{e^2}{a}$.

Полная

$$\rho = \frac{z}{a}, \quad \varepsilon = \frac{E}{E_0}, \quad (\varepsilon < 0), \quad (30)$$

перенесём (29) в леве:

$$\frac{d^2 \chi}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\chi}{d\rho} + \left(2\varepsilon + \frac{2}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) \chi = 0 \quad (31)$$

Поготавка

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{\rho}} y \quad (32)$$

(31), (32) $\Rightarrow$

$$\frac{d^2 y}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dy}{d\rho} + \left(2\varepsilon + \frac{2}{\rho} - \frac{S^2}{4\rho^2} \right) y = 0, \quad (33)$$

$$S = 2l + 1.$$

Подстановка:

$$x = \rho \sqrt{-8\varepsilon} \quad (34)$$

(33), (34) $\Rightarrow$

$$x y'' + y' - \left(\frac{x}{4} + \frac{s^2}{4x} \right) y + \lambda y = 0, \quad (35)$$

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) - \left(\frac{x}{4} + \frac{s^2}{4x} \right) y + \lambda y = 0, \quad (36)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}} \quad (37)$$

Положим

$$y(x) = x^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{x}{2}} u(x) \quad (38)$$

(36), (38) $\Rightarrow$

$$x u'' + (s+1-x) u' + \left(\lambda - \frac{s+1}{2} \right) u = 0 \quad (39)$$

Умножим (39) на $x^s e^{-x}$ и обозначим

$$\tilde{\lambda} = \lambda - \frac{s+1}{2}.$$

(39) $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^{s+1} e^{-x} \frac{du}{dx} \right\} + \tilde{\lambda} x^s e^{-x} u = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (40)$$

$$\tilde{\lambda} = n_z, \quad u(x) = L_{n_z}^s(x),$$

$$L_n^s(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+s} e^{-x}), \quad (41)$$

$$1 = n_r + \frac{s+1}{2}, \quad s = 2\ell + 1 \Rightarrow$$

$$1 = n_r + \ell + 1 = n \quad (42)$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

$$y_{n_r}(x) = x^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_r}^s(x) \quad (43)$$

n - главное квантовое число, n_r - радиальное квантовое число, ℓ - орбитальное квантовое число.

$$(30), (37), (42) \Rightarrow$$

$$E_n = - \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2} \quad (44)$$

Квантованные значения энергии E_n зависят только от главного квантового числа n .

Положим E равным энергии кванта:

$$E = -\hbar\omega = -\hbar\omega, \quad \text{где } \omega = \frac{\omega}{2\pi}. \quad \text{Тогда}$$

$$\omega = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2 \hbar} = \frac{R}{n^2}, \quad (45)$$

$$\text{где } R = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 \hbar} = \frac{\mu e^4}{4\pi \hbar^3} - \text{постоянная}$$

Ридберга.

$$E_n \rightarrow E_{n_1}$$

Частота излучаемого кванта ν_{nn_1} :

$$\nu_{nn_1} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (46)$$

Серия Лаймана ($n_1 = 1, n = 2, 3, \dots$)

$$\nu_{n1} = R \left(1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

серия Бальмера ($n_1 = 2, n = 3, 4, \dots$)

$$\nu_{n2} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

серия Пашена ($n_1 = 3, n = 4, 5, \dots$)

$$\nu_{n3} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Построим соответствующие функции водородного атома:

$$(43), (34), (32), (31), (42) \Rightarrow$$

$$\chi_{ne}(\rho) = A_n \left(\frac{2\rho}{n} \right)^l e^{-\frac{2\rho}{n}} L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2\rho}{n} \right). \quad (47)$$

A_n определяется из условия нормировки

$$\int_0^\infty \rho^2 \chi_{ne}^2(\rho) d\rho = 1. \quad (48)$$

$$(47), (48) \Rightarrow$$

$$\chi_{n\ell}(\rho) = \left(\frac{2}{n}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{2n \cdot (n+\ell)!}} \left(\frac{2\rho}{n}\right)^\ell e^{-\rho/n} \left[\frac{2\ell+1}{n-\ell-1} \left(\frac{2\rho}{n}\right) \right] \quad (49)$$

$$(28), (49) \Rightarrow$$

$$\psi_{m\ell} = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{2\ell_m \pi (\ell+m)!}} Y_\ell^{(m)}(\theta, \varphi) \chi_{n\ell}(\rho) \quad (50)$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$ - магнитное квантовое число.

Поскольку $n_r \geq 0$ ($n_r = 0, 1, 2, \dots$) и $n = n_r + \ell + 1$, то $\ell \leq n-1$, ($\ell = 0, 1, \dots, n-1$) и каждому значению ℓ соответствует $2\ell+1$ значений m . Заданному значению энергии E_n (заданному значению n) соответствует

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

различных собственных функций. Каждый уровень энергии имеет вырождение кратности n^2 .

Дискретный спектр отрицательных собственных значений энергии E_n состоит из бесконечного множества чисел, стремящихся к нулю.

Помимо отрицательного дискретного спектра существует также непрерывный спектр положительных собственных значений. В этом состоянии электрон уже не связан с ядром, но все еще находится в его поле (ионизированный атом водорода).

5.° Свойство полиномов Эрмита.

Теорема. Всякая функция $f(x)$ непрерывная и квадратично интегрируемая с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ на всей бесконечной прямой $\mathbb{R}^1$, ортогональная с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ всем полиномам Эрмита на $\mathbb{R}^1$ тождественно равна нулю.

Докажем это.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) f(x) e^{-x^2} dx = 0, n=0,1,\dots \quad (51)$$

$$\Phi(x) = f(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \rho(x) = 1 \Rightarrow F(x) = f(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \rho(x) = 1, x \in \mathbb{R}^1 \Rightarrow$$

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2 - i\omega x} dx$$

$\tilde{F}(\omega)$ - аналитична в полосе $\Pi_M \equiv \{|\operatorname{Im} \omega| \leq M\}, \forall M > 0 \Rightarrow$

$$\tilde{F}^{(\kappa)}(\omega) = (-i)^\kappa \int_{-\infty}^{+\infty} x^\kappa f(x) e^{-x^2 - i\omega x} dx, \kappa = 0,1,2,\dots \quad (52)$$

$$\text{В круге } \kappa_o^R \in \Pi_M: \tilde{F}(\omega) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\tilde{F}^{(\kappa)}(0)}{\kappa!} \omega^\kappa \quad (53)$$

$$(51), (52) \Rightarrow \tilde{F}^{(\kappa)}(0) = (-i)^\kappa \int_{-\infty}^{+\infty} x^\kappa f(x) e^{-x^2} dx =$$

$$= (-i)^\kappa \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\kappa} C_n H_n(x) \right\} f(x) e^{-x^2} dx =$$

$$= (-i)^\kappa \sum_{n=0}^{\kappa} C_n \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) f(x) e^{-x^2} dx = 0 \quad (54)$$

$$(53), (54) \Rightarrow \tilde{F}(\omega) = 0, x \in \kappa_o^R \Rightarrow \tilde{F}(\omega) = 0, x \in \Pi_M \quad (55)$$

$$(55) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \equiv 0 \Rightarrow f(x) = F(x) e^{\frac{x^2}{2}} \equiv 0.$$

Из доказанной теоремы и ортогональности полиномов Эрмита вытекает

Следствие. Система полиномов Эрмита исчерпывает все собственные функции краевой задачи на собственные значения для уравнения (1а).

Гл. III. Математическое моделирование нелинейных
блотов и процессов.

§1. Математические модели процессов нелинейной теплопроводности и горения.

1. Краевые задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности.

Рассмотрим квазилинейное уравнение
теплопроводности:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1)$$

Параболическое уравнение (1) с коэффициентом $\kappa(u)$, удовлетворяющим условию $\kappa(0) = 0$, называется вырождающимся.

В автомодельных решениях уравнения (1) мы будем называть такие его частные решения специального вида, которые могут быть получены путем интегрирования некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, аргумент искомого функций которых представляет собой комбинацию независимых переменных x и t .

Найдем автомодельное решение уравнения (1) удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = u_1, \quad u(x, 0) = u_2 \quad (2)$$

$$\text{Пусть } \xi = \frac{x}{2\sqrt{t}}, \quad u(x, t) = \theta\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \theta(\xi) \quad (3)$$

$$\text{Тогда: } \begin{cases} (\kappa(\theta) \theta')' = -2c\rho \theta', & \xi > 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \theta(0) = u_1, & \theta(\infty) = u_2 \end{cases} \quad (5)$$

Задача (4), (5) имеет единственное решение, которое в общем случае находится численно.

Рассмотрим автомодельное решение уравнения (1) типа бегущей волны:

$$\xi = x - Dt, \quad u(x, t) = \theta(x - Dt) = \theta(\xi) \quad (6)$$

$$(1), (6) \Rightarrow (\kappa(\theta) \theta')' = -D c_p \theta', \quad -\infty < \xi < \infty \quad (7)$$

Ищем непрерывное решение (6), обладающее непрерывными „тепловым потоком“

$$\kappa(\theta) \theta' \Rightarrow W(x, t) = -\kappa(u(x, t)) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (8)$$

Пусть бегущая волна начала движение по нулевой фронту температуры:

$$\theta(\xi) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty; \quad \kappa(\theta) \theta' \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty \quad (9)$$

$$(6), (9) \Rightarrow \frac{\kappa(\theta)}{\theta} \frac{d\theta}{d\xi} = -D c_p \quad (10)$$

Пусть $\kappa(u) = \kappa_0 u^\sigma$, $\kappa_0 > 0$, $\sigma > 0$ (при $\sigma = \frac{5}{2}$ - коэффициент электронной теплопроводности в полностью ионизованной плазме).

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \left[\frac{\sigma D c_p}{\kappa_0} (-\xi) \right]^{1/\sigma} & \text{при } \xi \leq 0, \\ 0 & \text{при } \xi > 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$(6), (11) \Rightarrow u(x, t) = \begin{cases} u_0 t^{1/\sigma} \left(1 - \frac{x}{Dt} \right)^{1/\sigma} & \text{при } 0 \leq x \leq Dt, \\ 0 & \text{при } x > Dt, \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{где} \quad u_0 = \left(\frac{\sigma D^2 c_p}{\kappa_0} \right)^{1/\sigma}.$$

Функция (12) - обобщенное решение квазилинейного вырождающегося параболического уравнения:

1) функция (12) финитна по x в любой конечный момент времени: существует постоянная $A > 0$ такая, что $u(x, t) = 0$ при $x \geq A$;

2) функция (12) не имеет всюду непрерывных производных, входящих в уравнение (1): при $\sigma = 1$ они имеют разрыв 1-го рода, при $\sigma = 2$ - разрыв второго рода на прямой $x = Dt$.

Замечание. Метловый поток

$$W(x, t) = \begin{cases} \frac{\kappa_0 u_0^{\sigma+1}}{\sigma D} t^{1/\sigma} \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{1/\sigma} & \text{при } 0 \leq x \leq Dt, \\ 0 & \text{при } x > Dt \end{cases} \quad (13)$$

является непрерывной функцией: $W(Dt-0, t) = W(Dt+0, t) = 0$.

Отличительной особенностью вырождающихся уравнений (1) является то, что они могут описывать процессы с конечной скоростью распространения возмущений.

Решения вида (3) и (6) - единственные типы нетривиальных автомодельных решений, которые допускает уравнение (1) при произвольных коэффициентах $\kappa(u)$. Новые типы автомодельных решений появляются только при специальном виде функции $\kappa(u)$. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), & x > 0, t > 0 & (14) \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0, & (15) \\ u(0, t) = u_0 t^m, & t \geq 0, m > 0. & (16) \end{cases}$$

Автомодальное решение:

$$\xi = \frac{x}{\kappa_0^{1/2} u_0^{\sigma/2} t^{(1+m\sigma)/2}}, \quad u(x,t) = u_0 t^m \Theta(\xi) \quad (17)$$

$$\begin{cases} (\Theta^\sigma \Theta')' + \frac{1}{2}(1+m\sigma)\xi \Theta' - m\Theta = 0, \quad \xi > 0, & (18) \\ \Theta(0) = 1; \quad \Theta(\infty) = 0 & (19) \end{cases}$$

Непрерывность теплового потока $\Theta^\sigma \Theta'$

При $m = \frac{1}{\sigma}$ решение (17) совпадает с бегущей волной (11). При $m \neq \frac{1}{\sigma}$ задача (18), (19) решается численно.

Можно показать, что при любых $m > 0$ существует такое $\xi_0(m, \sigma) > 0$, что $\Theta(\xi) = 0$ при $\xi > \xi_0$ и $\Theta(\xi) > 0$ при $0 \leq \xi \leq \xi_0$. Решение (17) - температурная волна, движущаяся по невозмущенному фронту температур. Фронт волны $x_\phi(t)$:

$$x_\phi(t) = \xi_0 \kappa_0^{1/2} u_0^{\sigma/2} t^{(1+m\sigma)/2} \quad (20)$$

ускоряет своё движение и при $t \rightarrow \infty$ нагревает до бесконечно больших температур всю полупрямую $x \geq 0$.

Решение (17) асимптотически устойчиво при $t \rightarrow +\infty$ относительно малых изменений начальных значений и малых отклонений $K(u)$ от отеческой зависимости.

При незначительных изменениях условий (15), (16) основные закономерности процесса нагрева, которые даёт пространственно-временная структура автомодального решения (17), сохраняются.

2. Реакция с обострением.

Реакцией с обострением называется такой закон изменения некоторой величины, который обеспечивает её неограниченное возрастание в течение конечного времени.

Задача Коши для одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = \kappa_0 (u^\beta u_x)_x + f_0 u^\beta, & -\infty < x < \infty, 0 < t \leq T \quad (1) \\ u(x, 0) = u_0(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \quad (2)$$

$\kappa_0 > 0, f_0 > 0, \beta > 1$, $\kappa(u) = \kappa_0 u^\beta$ - коэффициент теплопроводности. Сверхкритическое возмущение: $\beta > 1$.

Преобразование переменных

$$t \rightarrow \frac{t}{f_0}, \quad x \rightarrow x \sqrt{\frac{\kappa_0}{f_0}} \quad (3)$$

(1), (3) $\Rightarrow$

$$u_t = (u^\beta u_x)_x + u^\beta \quad (4)$$

Свойства решений уравнения (4) существенно различаются в случаях $\beta = 3$, $\beta < 3$, $\beta > 3$.

Частный случай уравнения (4):

$$u_t = (u^\beta u_x)_x \quad (5)$$

Получим точное автомодельное решение уравнения (5).

Ищем решение в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{1/4}} \theta(\xi), \quad (6)$$

где $\xi = \frac{x^2}{\sqrt{t}}.$

(5), (6) $\Rightarrow$

$$2 \theta^2(\xi) \theta'(\xi) + \frac{1}{4} \theta(\xi) = \psi(\xi),$$

$$2 \xi \psi'(\xi) + \psi(\xi) = 0.$$

Решение Зелодовича - Молчанова - Баренблатта:

$$u_A(x, t) = \frac{1}{t^{1/4}} \left[\frac{1}{2} \left(\eta_0^2 - \frac{x^2}{\sqrt{t}} \right) \right]_+^{1/2}, \quad (7)$$

где $\eta_0 = 2 \sqrt{\frac{E_0}{\pi}}, \quad [z]_+ = \max\{0, z\}.$

$$u_A(0, t) = \frac{1}{t^{1/4}} \frac{\eta_0}{\sqrt{2}}$$

$$u_A(x, t) \neq 0, \quad x \in (-\eta_0 t^{1/4}, \eta_0 t^{1/4}), \quad t > 0$$

Решение (7) описывает импульсные волны.

$u_A(x, t)$ - решение типа мгновенного точечного источника мощности E_0 , действующего в точке $x = 0$ в момент $t = 0$.

Пусть в среде имеется источник тепловой энергии, соответствующий $\beta = 3$:

$$u_t = (u^2 u_x)_x + u^3. \quad (8)$$

Ищем автомодельное решение (8) в виде:

$$u = \frac{1}{\sqrt{T_0 - t}} \theta(x) \quad (9)$$

Из (8), (9) $\Rightarrow$

$$\theta(x) \theta''(x) + 2 (\theta'(x))^2 + \theta^2(x) = \frac{1}{2} \quad (10)$$

(9), (10) $\Rightarrow$ локализованной S-волны с абсорбцией:

$$u_A(x, t) = \frac{1}{\sqrt{T_0 - t}} \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{L_s}\right), & |x| < \frac{L_s}{2}, \\ 0, & |x| \geq \frac{L_s}{2}, \end{cases} \quad (11)$$

где T_0 - время существования решения, $L_s = \pi \sqrt{3}$ - длина локализованной волны в любой момент времени.

Решение локализовано в области $\omega_L = \left(-\frac{L_s}{2}, \frac{L_s}{2}\right)$.

При $t \rightarrow T_0$, $x \in \omega_L$ $u_A(x, t) \rightarrow \infty$.

$$u_A(0, t) = \sqrt{\frac{3}{2(T_0 - t)}} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T_0$$

Такие тепловые структуры называются фронтальными с абсорбцией. Такие температурные волны.

Рассмотрим уравнение (4) с $\beta = 2$.

$$u_t = (u^2 u_x) x + u^2 \quad (12)$$

Ищем решение в виде

$$u_A(x, t) = \frac{1}{T_0 - t} \theta(\xi), \quad \xi = x \sqrt{T_0 - t}, \quad (13)$$

где T_0 - время существования точечной структуры.

(13), (12) $\Rightarrow$

$$(\theta^2 \theta')' + \frac{\xi}{2} \theta' - \theta + \theta^2 = 0. \quad (14)$$

Функция $\theta(\xi)$ второго порядка на интервале $(-\xi_0, \xi_0)$ и равна нулю вне его. $\theta(\xi)$ и ξ_0 определяются численно.

Свойства решения:

а) решение с обострением:

$$u_A(0, t) = \frac{1}{T_0 - t} \theta(0) \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow T_0$$

б) в любой момент времени точечная структура имеет конечные правый $x_+(t)$ и левый $x_-(t)$ фронты:

$$x_+(t) = \frac{\xi_0}{\sqrt{T_0 - t}} \quad x_-(t) = -\frac{\xi_0}{\sqrt{T_0 - t}} \quad (15)$$

в) фронты движутся с увеличивающейся скоростью и в момент обострения $t = T_0$ точечная структура охватывает всю прямую, превращаясь ввиду до бесконечной точечной структуры. HS-режим.

Рассмотрим уравнение (4) при $\beta = 4$.

$$u_t = (u^2 u_x)_x + u^4 \quad (16)$$

Мощность источника излучения $Q(u) = u^4$ при больших температурах выше, чем в S -режиме ($\beta = 3$) и HS -режиме ($\beta = 2$). Сильно локализованные тепловые структуры.

Ищем решение в виде

$$u_A(x, t) = \frac{1}{\sqrt[3]{T_0 - t}} \theta(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt[6]{T_0 - t}}, \quad (17)$$

где $T_0 > 0$ - время обострения решения.

(16), (17) $\Rightarrow$

$$(\theta^2 \theta')' - \frac{1}{6} \xi \theta' - \frac{1}{3} \theta + \theta^4 = 0 \quad (18)$$

$\theta(\xi) > 0$, $-\infty < \xi < \infty$. Асимптотика:

$$\theta(\xi) \simeq C_A \frac{1}{|\xi|^2}, \quad |\xi| \rightarrow \infty,$$

C_A - постоянная, определяемая численно.

Локализация попикистак в эффективном смысле:

решение со временем растёт во всех точках, но численно растёт только в точке $x = 0$. Температура ограничена сверху предельным распределением

$$u_A(x, t) < u_A(x, T_0) = \frac{C_A}{|x|^2}. \quad (19)$$

L S -режим.

§2. Математические модели теории нелинейных волн.

1. Метод характеристик.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at) \quad (2)$$

Уравнения переноса:

$$u_t^{(1)} + a u_x^{(1)} = 0, \quad u^{(1)} = f_1(x - at) \quad (3)$$

$$u_t^{(2)} - a u_x^{(2)} = 0, \quad u^{(2)} = f_2(x + at) \quad (4)$$

Автоматическое уравнение переноса:

$$u_t + F(u) u_x = 0 \quad (5)$$

Задача Коши:

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (6)$$

$$(7)$$

$$u(x, t) = f(x - u(x, t)t)$$

$$u_x = (1 - u_x t) f'(\xi), \quad u_t = (-u - u_t t) f'(\xi) \quad (8)$$

$$\xi = x - ut$$

$$(6), (8) \Rightarrow$$

$$-t(u_t + u u_x) f'(\xi) = 0,$$

где $f(\xi)$ - любая дифференцируемая функция.

Решение задачи (6), (7) определяется из нелинейного уравнения

$$u(x, t) = u_0(x - u(x, t)t)$$

Метод характеристик:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u(x, t)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = u(x, t) \quad (9)$$

$x = x(t)$ - решение уравнения (9) $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = u_t + u_x \frac{dx}{dt} = u_t + u u_x|_{x=x(t)} = 0 \Rightarrow$$

$u(x(t), t)$ постоянна на кривой $x = x(t) \Rightarrow$

$x = x(t)$ прямая линия на плоскости (x, t) с наклоном

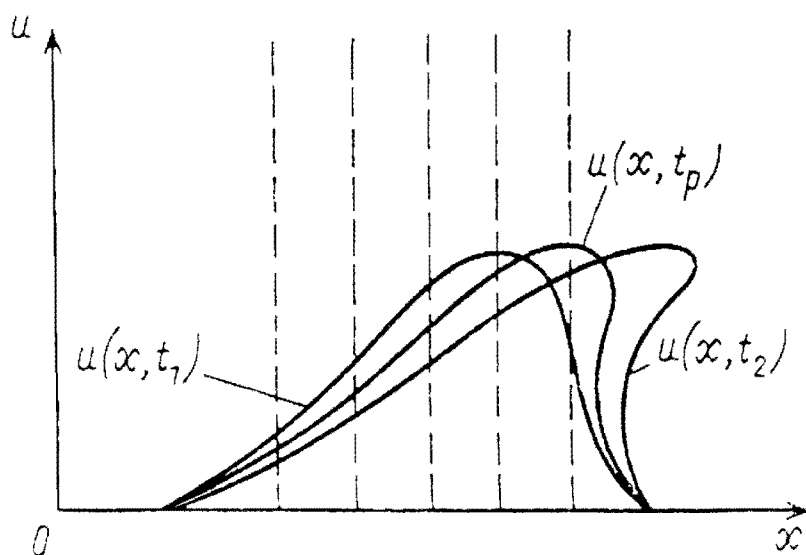
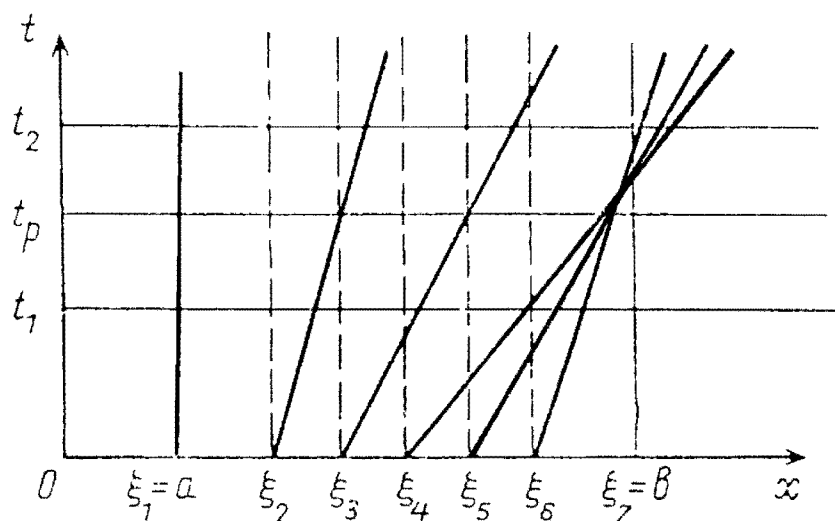
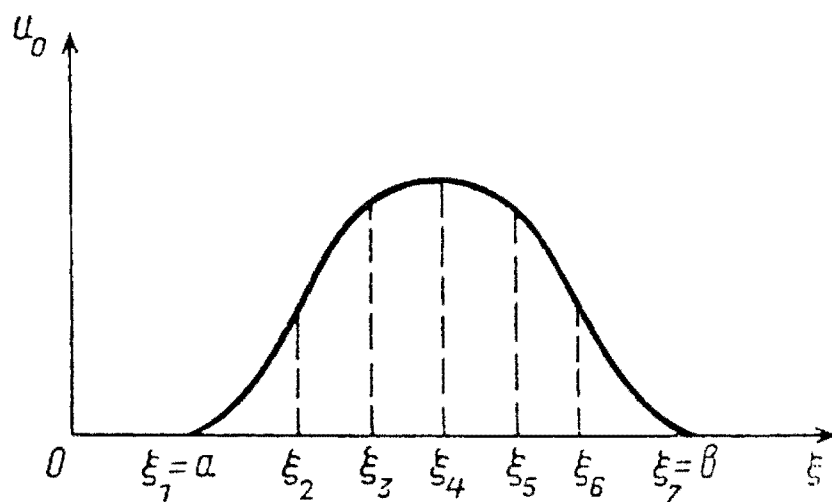
$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x(0)),$$

определенной начальной функцией $u_0(\xi)$, $\xi = x(0)$.

Уравнение прямой

$$\frac{t}{1} = \frac{x - \xi}{u_0(\xi)}$$

Мы получили однозначное соотношение прямой, зависящее от параметра ξ , на которой решение $u(x, t)$ уравнения (6) определяется однозначно. Это позволяет по начальной функции $u_0(\xi)$ определить функцию $u(x, t)$ в любой момент времени t .



Выберем точку
 $\xi_k \in [a, b]$

и построим соответствующую ей характеристику

$$\Gamma_{\xi_k}: x = \xi_k + t u_0(\xi_k)$$

с углом наклона

$$\tan \varphi = 1/u_0(\xi_k).$$

Всюду на характеристике

$$u|_{\Gamma_{\xi_k}} = u_0(\xi_k).$$

Точка (x_k, t_1) - точка пересечения прямой $t = t_1$ с характеристикой Γ_{ξ_k}

Скорость переноса начального значения $u_0(\xi_k)$ вдоль характеристики Γ_{ξ_k} зависит от решения, профиль $u_0(x)$ искажается - дисперсия бегущей волны. При $t \geq t_p$ характеристики пересекаются, профиль неоднозначный - опрокидывание волн.

2. Обобщенное решение. Условие на разрыве.

Обобщенное решение: функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (6) в обобщенном смысле, если для любого прямоугольника

$$\Pi_{xt} = \{(x, t) : x_1 < x < x_2, 0 < t_1 < t < t_2\}$$

и любой бесконечно дифференцируемой и компактной в Π_{xt} функции $\psi(x, t)$ справедливо интегральное тождество

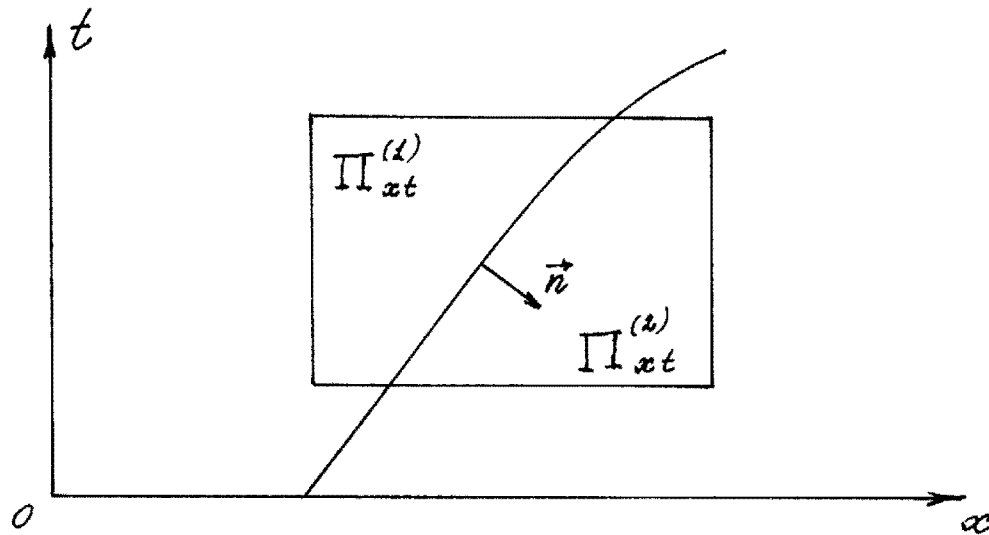
$$\int_{\Pi_{xt}} \left\{ u \psi_t + \frac{1}{2} u^2 \psi_x \right\} dx dt = 0 \quad (10)$$

Если $u \in C^{(1)}$, то обобщенное решение (10) удовлетворяет уравнению (6) в обычном смысле: проинтегрируем (10) по частям

$$\int_{\Pi_{xt}} \{ u_t + u u_x \} \psi dx dt = 0. \quad (11)$$

В силу произвольности Π_{xt} и ψ из (11) получим уравнение (6).

Пусть $u(x, t)$ - разрывное решение, имеющее единственный разрыв на кривой $S = \{(x, t): x = s(t)\}$.
 Пусть $u(x, t) \in C^{(1)}$ при $(x, t) \in \Pi_{x,t}^{(l)}$, $l = 1, 2$.



Функция $u(x, t)$ в областях $\Pi_{x,t}^{(l)}$, $l = 1, 2$
 удовлетворяет уравнению (6).
 Проинтегрируем (10) по частям в области $\Pi_{x,t}^{(1)}$:

$$\int_{\Pi_{x,t}^{(1)}} \left\{ u \psi_t + \frac{1}{2} u^2 \psi_x \right\} dx dt = \int_S \left\{ \psi \cos(\hat{n}t) u^- + \psi \cos(\hat{n}x) \frac{(u^-)^2}{2} \right\} ds \quad (12)$$

и в области $\Pi_{x,t}^{(2)}$:

$$\int_{\Pi_{x,t}^{(2)}} \left\{ u \psi_t + \frac{1}{2} u^2 \psi_x \right\} dx dt = - \int_S \left\{ \psi \cos(\hat{n}t) u^+ + \psi \cos(\hat{n}x) \frac{(u^+)^2}{2} \right\} ds, \quad (13)$$

где $\vec{n} = \{ \cos(\hat{n}t), \cos(\hat{n}x) \}$, u^+ , u^- - предельные значения $u(x, t)$ на кривой S при отбегании к ней справа и слева.

Сложим (12) и (13):

$$\int_S \psi \left\{ \cos(\hat{n}t)[u] + \cos(\hat{n}x) \left[\frac{u^2}{2} \right] \right\} dS = 0, \quad (14)$$

где $[u] = u^+ - u^-$. В силу произвольности $\psi(x, y)$

(14) $\Rightarrow$

$$\cos(\hat{n}t)[u] + \cos(\hat{n}x) \left[\frac{u^2}{2} \right] \Big|_S = 0 \quad (15)$$

Так как

$$\cos(\hat{n}t) = \frac{-\dot{s}(t)}{\sqrt{1 + \dot{s}^2(t)}}, \quad \cos(\hat{n}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}^2(t)}}, \quad (16)$$

то (15), (16) $\Rightarrow$

$$\dot{s}(t) = \frac{u^+ + u^-}{2}, \quad (17)$$

где $v_p = \dot{s}(t)$ - скорость распространения разрыва.

Формула (17) называется формулой Гюгонио - Ренкина или формулой условий на разрыве.

Формула (17) позволяет определить скорость распространения разрыва по значениям $u^\pm$, но не даёт ответ на вопрос о положении разрыва $x = s(t)$.

Построение разрыва.

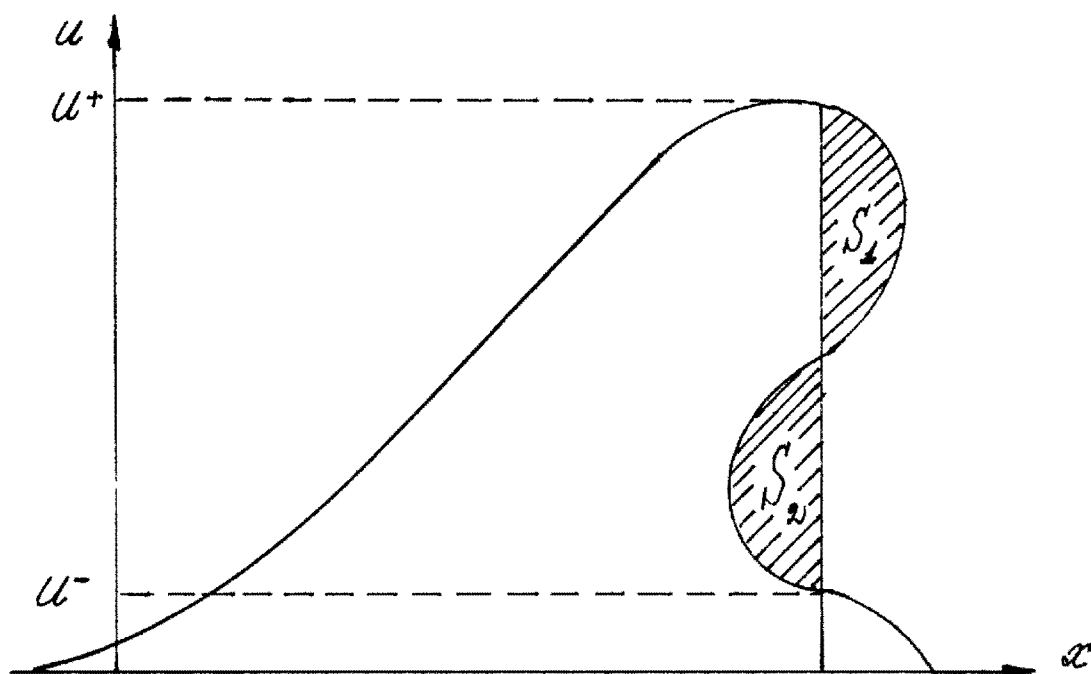
(6) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u dx = 0, \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx,$$

предполагая, что $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$.

Площадь I под кривой $u = u(x, t)$ оказывается инвариантной во времени (интегралом движения).



Разрыв $x = s(t)$ нужно построить так, чтобы $I(u)$, отвечающий разрывному решению, был равен $I(u_0)$ для начальной функции u_0 .

В результате из однозначного непрерывного решения получается разрывное, но уже однозначное решение, являющееся обобщением решения уравнения (6). Условия на разрыве при этом выполняются автоматически.

3. Уравнение Кортевега-де Фриза и законы сохранения.

Функция $\eta(x, t)$, описывающая процесс распространения длинных волн на поверхности воды приблизительно удовлетворяет уравнению

$$\eta_t + c \left(1 + \frac{3}{2k_0} \eta \right) \eta_x + \frac{k_0^2}{6} c \eta_{xxx} = 0, \quad (18a)$$

где k_0 - глубина жидкости, $c = \sqrt{gk_0}$ - скорость длинных волн на мелкой воде.

Уравнение (18a) называется уравнением Кортевега-де Фриза.

Из (18a) с помощью линейной замены переменных получим:

$$u_t - c u u_x + u_{xxx} = 0, \quad (18b)$$

(18b) - канонический вид уравнения Кортевега-де Фриза.

Уравнение (18b) обладает бесконечным числом законов сохранения (законов сохранения):

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x, t) dx$$

и т.д., что означает, что это уравнение обладает глубокой внутренней симметрией, которая и выделяет его среди других нелинейных уравнений.

4. Схема метода обратной задачи.

1) Прямая и обратная задачи рассеяния.

Определение. Функция $f(x, t)$ называется быстроубывающей, если

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|) |f(x, t)| dx < \infty \quad (19)$$

С уравнением Кортевега-де Фриза тесно связано стационарное уравнение Шредингера (20):

$$\Psi_{xx} + (\lambda - u(x, t))\Psi = 0 \quad (20)$$

с потенциалом $u(x, t)$, зависящим от t как от параметра.

Рассмотрим для уравнения (20) две задачи.

а) Нахождение квадрупольных аннигиляционных уровней энергии связанных состояний.

Найти такие значения λ , при которых уравнение (20) имеет нетривиальные решения $\Psi(x, t) \in L_2(\mathbb{R}^1)$.

Здесь $\Psi(x, t)$ - нормированные на единицу волновые функции.

Эта задача имеет решение только при $\lambda < 0$.

При $x \rightarrow \infty$ решения имеют асимптотику

$$\Psi_m(x, t) \sim C_m(t) e^{-\kappa_m x},$$

где $\Psi_m(x, t)$ - собственная функция, нормированная на 1,

$\lambda_m = -\kappa_m^2$ - собственное значение,

$$C_m(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi_m(x, t) e^{\kappa_m x} \quad (21)$$

б) Задача рассеяния плоской волны единичной амплитуды на потенциале $u(x, t)$.

Найти при $\lambda \geq 0$ обратенные решения уравнения (20) с заданным характером асимптотического поведения при $x \rightarrow \pm \infty$:

$$\psi(x, t) \sim e^{-i\kappa x} + v(\kappa, t) e^{i\kappa x} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty,$$

$$\psi(x, t) \sim a(\kappa, t) e^{-i\kappa x} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty,$$

где $\kappa^2 = \lambda$, а подматрица определенной функции $a(\kappa, t)$ и $v(\kappa, t)$ - коэффициенты прохождения и отражения, причем

$$|a(\kappa, t)|^2 + |v(\kappa, t)|^2 = 1.$$

Совокупности решений задач а) и б)

$\{x_m, c_m\}$, $\{a(\kappa, t), v(\kappa, t)\}$ называются данными рассеяния.

Прямая задача рассеяния: определение для заданного потенциала данных рассеяния.

Обратная задача рассеяния: определение по заданным данным рассеяния соответствующего потенциала.

Данные рассеяния достаточно для однозначного определения потенциала.

Схема решения обратной задачи рассеяния.

а) По данным рассеяния строится функция $B(x; t)$ - ядро уравнения Гельфанда - Левитана:

$$B(x; t) = \sum_{m=1}^n C_m^2(t) e^{-\lambda_m x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k, t) e^{ikx} dk \quad (22)$$

б) Ищется решение линейного интегрального уравнения Гельфанда - Левитана:

$$\mathcal{K}(x, y; t) + B(x+y; t) + \int_x^{\infty} B(y+z; t) \mathcal{K}(x, z; t) dz = 0 \quad (23)$$

в) Решив уравнение (23) и найдя $\mathcal{K}(x, y; t)$, по формуле (24)

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} \mathcal{K}(x, x; t) \quad (24)$$

определим функцию $u(x, t)$, которая и является искомым потенциалом, то есть решением обратной задачи рассеяния.

2) Решение задачи Ньюи.

Рассмотрим задачу Ньюи:

$$\begin{cases} u_t - 6u u_x + u_{xxx} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (25)$$

Решение $u(x, t)$ задачи Коши (25) назовём быстроубывающим, если функция $u(x, t)$ и все её производные по x до третьего порядка включительно являются быстроубывающими функциями.

Лемма 1. Если потенциал $u(x, t)$ в (20) является быстроубывающим решением уравнения Кортевега-де Фрида, то собственные значения $\lambda_m = -\mathcal{E}_m^2$ не зависят от времени t .

Лемма 2. Если потенциал $u(x, t)$ в (20) является быстроубывающим решением уравнения Кортевега-де Фрида, то данные рассеяния $C_m(t)$, $b(k, t)$ и $a(k, t)$ зависят от времени следующим образом:

$$\begin{aligned} C_m(t) &= C_m(0) \exp(4\mathcal{E}_m^3 t), \quad \mathcal{E}_m^2 = -\lambda_m, \\ b(k, t) &= b(k, 0) \exp(8ik^3 t), \quad k^2 = \lambda > 0, \\ a(k, t) &= a(k, 0) \end{aligned} \quad (26)$$

Зная данные рассеяния для $u_0(x) \equiv u(x, 0)$, можно по формулам (26) найти данные рассеяния для $u(x, t)$ и затем, построив и решив уравнение Гельфанда-Левитана, определить функцию $u(x, t)$.

Схема построения быстроубывающих решений задачи Коши:

а) Рассмотрим стационарное уравнение Шредингера с потенциалом $U_0(x)$:

$$\Psi_{xx} + (\lambda - U_0(x))\Psi = 0 \quad (27)$$

и определим данные рассеяния $\{x_m, C_m(0)\}$ и $\{a(\kappa, 0), b(\kappa, 0)\}$.

б) По формулам (26) определим $C_m(t)$ и $b(\kappa, t)$ и отбросим ядро уравнения Гельфанда-Левитана (23)

$$B(x; t) = \sum_{m=1}^n C_m^2(0) \exp(\delta x_m^3 t - x_m x) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(\kappa, 0) \exp(i\delta \kappa^3 t + i\kappa x) d\kappa \quad (28)$$

в) Решив уравнение Гельфанда-Левитана (23) с ядром (28) по формуле (24) определим решение $u(x, t)$ задачи Коши (25) для уравнения Korteweg-de Vries.

5. Солитонные решения.

Рассмотрим решение задачи Коши (25) при

$$U_0(x) = -\frac{2}{ch^2 x} \quad (29)$$

Данные рассеяния для уравнения (20) с потенциалом (29)

$$\psi_{xx} + \left(\lambda + \frac{2}{ch^2 x} \right) \psi = 0 \quad (30)$$

имеют вид: $V(k, 0) = 0$, существует только одно собственное значение $\lambda_1 = -1 = -\alpha_1^2$, $C_1(0) = \sqrt{2}$.

Ядро уравнения Гельфанда-Левитана имеет вид

$$B(x; t) = 2e^{st-x}. \quad (31)$$

Рассмотрим уравнение Гельфанда-Левитана с ядром (31)

$$\mathcal{H}(x, y; t) + 2e^{st-x-y} + 2e^{t-y} \int_x^\infty \mathcal{H}(x, z; t) e^{-z} dz = 0 \quad (32)$$

и будем искать его решение в виде

$$\mathcal{H}(x, y; t) = L(x; t) e^{-y}. \quad (33)$$

Получим

$$L(x; t) = -\frac{2e^x}{1 + e^{2x-st}}. \quad (34)$$

Следовательно,

$$H(x, y; t) = - \frac{2e^{x-y}}{1 + e^{2x-8t}} \quad (35)$$

и по формуле (24) получим решение задачи Коши (25) с начальной функцией (29):

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} \left\{ - \frac{2}{1 + e^{2x-8t}} \right\} = - \frac{2}{ch^2(x-4t)}. \quad (36)$$

Решение (36) является частным случаем более общего решения уравнения Korteweg-de Vries

$$u(x, t) = - \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{1}{ch^2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha (x - x_0) - \frac{\alpha^3}{2} t \right\}}, \quad (37)$$

соответствующие значениям параметров $\alpha = 2$, $x_0 = 0$.

Решения уравнения Korteweg-de Vries вида (37) получили название солитонов. Они описывают бегущие волны постоянной формы, имеющие скорость, прямо пропорциональную амплитуде решения.

Будем называть солитонами такие решения нелинейных уравнений, которые имеют вид бегущих уединенных волн, взаимодействующих таким образом, что после взаимодействия они сохраняют неизменной свою форму, получая лишь приращение в фазе.

Гл. IV Методы исследования математических моделей.

§1 Вариационные методы решения краевых задач и определения собственных значений.

1. Принцип Дирихле

$$D[u(x,y)] = \int_D F(x,y,u,u_x,u_y) dx dy \quad (1)$$

Уравнение Эйлера:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0, \quad p = u_x, q = u_y \quad (2)$$

Уравнение Лапласа $\Delta u(x,y) = 0$ есть уравнение Эйлера задачи на минимумы интеграла Дирихле

$$D[u] = \int_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy \quad (3)$$

Непрерывные в $\bar{D}$ функции, кусочнонепрерывно дифференцируемые в $\bar{D}$, которые принимают на кривой Γ внутри D заданные непрерывные значения $\varphi(x,y)$ и интеграл Дирихле от которых конечен, называются допустимыми функциями.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M \in D, \\ u(p) = \varphi(p), & p \in \Gamma \end{cases} \quad (4)$$

$$(5)$$

Первая вариационная задача: среди допустимых функций найти такую, которая доставляет минимум интегралу Дирихле.

Теорема. Если заданная на кривой Γ функция $\varphi(p)$ такова, что класс допустимых функций не является пустым, то задача Дирихле (4), (5) и первая вариационная задача эквивалентны.

Доказательство. 1) Пусть $u(x,y) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$ - решение первой вариационной задачи. Класс допустимых функций имеет вид:

$$u(x, y) + \varepsilon h(x, y), \quad (6)$$

где $h(x, y) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$, интеграл от h конечен и $h(p) = 0, p \in \Gamma$, ε - произвольная постоянная.

$$\mathcal{D}[u + \varepsilon h] = \mathcal{D}[u] + 2\varepsilon \mathcal{D}[u, h] + \varepsilon^2 \mathcal{D}[h] \geq 0, \quad (7)$$

где
$$\mathcal{D}[u, h] = \int_D (u_x h_x + u_y h_y) dx dy \quad (8)$$

Из (7) и произвольности $\varepsilon \Rightarrow \mathcal{D}[u, h] = 0$.

$$\int_D h \Delta u dx dy = \int_{\Gamma} h \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_D \text{grad} u \cdot \text{grad} h dx dy \quad (9)$$

$$(9), h(p) = 0, p \in \Gamma \Rightarrow \int_D h \Delta u dx dy = -\mathcal{D}[u, h] = 0 \quad (10)$$

$$u(M) \in C^{(2)}(D) \Rightarrow \Delta u \in C(D), h(x, y) - \text{произвольная функция} \Rightarrow (11) \Rightarrow \Delta u(x, y) = 0 \quad (11)$$

д) Пусть теперь $u(x, y)$ - решение задачи (4), (5), а $u(x, y) + \varepsilon h(x, y)$ - класс допустимых функций, причем для $u(x, y)$ и $h(x, y)$ имеет место формула

$$\mathcal{D}[u, h] = \int_{\Gamma} h \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_D h \Delta u dx dy \quad (12)$$

Из (12) и того, что $h(p) = 0, p \in \Gamma$ и $u(M)$ гармоническая функция следует, что $\mathcal{D}[u, h] = 0$. Поэтому

$$\text{из (7)} \Rightarrow \mathcal{D}[u] \leq \mathcal{D}[u + \varepsilon h], \quad (13)$$

т.е. u минимизирует интеграл Дирихле и является решением первой вариационной задачи.

Замечание. Существуют и другие краевые задачи для уравнения Лапласа, которые имеют эквивалентные им вариационные задачи для интеграла Дирихле, например задача Неймана. Метод сведения краевых задач для уравнения Лапласа к эквивалентным им вариационным задачам носит название принципа Дирихле.

2. Задача о собственных значениях.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \quad M \in D, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} u(p) = 0, \quad p \in \Gamma, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}) \end{cases} \quad (16)$$

Вторая вариационная задача: среди допустимых функций, удовлетворяющих условию (15), найти ту, для которой функционал

$$J(u) = \frac{D(u)}{H(u)}, \quad (17)$$

$$\text{где} \quad H(u) = \int_D u^2(x, y) dx dy, \quad (18)$$

принимает наименьшее значение.

Теорема 1. Если $u(x, y)$ - решение второй вариационной задачи, то $u(x, y)$ является решением задачи (14)-(16).

Доказательство. Пусть u - решение второй вариационной задачи, причем наименьшее значение $J(u)$

$$J(u) = \frac{D(u)}{H(u)} = \lambda > 0 \quad (19)$$

Для класса допустимых функций $u(x, y) + \varepsilon k(x, y)$, где ε - произвольная постоянная, $k(x, y)$ - произвольная допустимая функция, $k(p) = 0, p \in \Gamma$, имеем

$$F(\varepsilon) = \frac{D(u + \varepsilon k)}{H(u + \varepsilon k)} = \frac{D(u) + 2\varepsilon D(u, k) + \varepsilon^2 D(k)}{H(u) + 2\varepsilon H(u, k) + \varepsilon^2 H(k)} \geq \lambda, \quad (20)$$

$$\text{где} \quad H(u, k) = \int_D u k dx dy. \quad (21)$$

Поскольку $F(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ имеет минимум, то

$$F'(0) = 2 \frac{H(u) D(u, k) - D(u) H(u, k)}{H^2(u)} = 0 \quad (22)$$

$$(19) \Rightarrow D(u) = \lambda H(u) \quad (23)$$

Подставим (23) в (22):

$$\mathcal{H}(u) \mathcal{D}(u, h) - \mathcal{D}(u) \mathcal{H}(u, h) = \mathcal{H}(u) \{ \mathcal{D}(u, h) - \lambda \mathcal{H}(u, h) \} = 0 \quad (24)$$

Поскольку $\mathcal{H}(u) \neq 0$, то из (24) $\Rightarrow$

$$\mathcal{D}(u, h) - \lambda \mathcal{H}(u, h) = 0 \quad (25)$$

$u, h \in C^{(2)}(\mathcal{D}) \cap C^{(1)}(\bar{\mathcal{D}})$, контур Γ достаточно малый

$$\mathcal{D}(u, h) = \int_{\mathcal{D}} (u_x h_x + u_y h_y) dx dy = - \int_{\mathcal{D}} \Delta u h dx dy \quad (26)$$

$$(26) \Rightarrow \mathcal{D}(u, h) - \lambda \mathcal{H}(u, h) = - \int_{\mathcal{D}} (\Delta u + \lambda u) h dx dy =$$

$$= - \mathcal{H}(\Delta u + \lambda u, h) = 0 \quad (27)$$

$u \in C^{(2)}(\mathcal{D}) \Rightarrow \Delta u \in C(\mathcal{D})$, $h(x, y)$ - произвольная функция

$$(27) \Rightarrow \Delta u + \lambda u = 0 \quad (28)$$

Теорема 2. Среди собственных значений задачи (14)-(16) найденное собственное значение является минимальным.

Доказательство. Пусть $\tilde{\lambda} \neq \lambda$ некоторое собственное значение и $\tilde{u}(x, y)$ соответствующая собственная функция.

$$\mathcal{H}(\Delta \tilde{u} + \tilde{\lambda} \tilde{u}, \tilde{u}) = \int_{\mathcal{D}} \Delta \tilde{u} \cdot \tilde{u} dx dy + \tilde{\lambda} \int_{\mathcal{D}} \tilde{u}^2 dx dy =$$

$$= \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \cdot \tilde{u} d\sigma - \int_{\mathcal{D}} (\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2) dx dy + \tilde{\lambda} \mathcal{H}(\tilde{u}) =$$

$$= - \mathcal{D}(\tilde{u}) + \tilde{\lambda} \mathcal{H}(\tilde{u}) = 0. \quad (29)$$

$$(29) \Rightarrow \tilde{\lambda} = \mathcal{J}(\tilde{u}) = \frac{\mathcal{D}(\tilde{u})}{\mathcal{H}(\tilde{u})} \quad (30)$$

$$\text{Поскольку} \quad \lambda = \min_{u \in \mathcal{P}} \mathcal{J}(u), \quad (31)$$

где $\mathcal{P}$ - класс допустимых функций, то

$$\lambda < \tilde{\lambda} \quad (32)$$

§2. Некоторые алгоритмы проекционного метода.

1. Общая схема алгоритмов.

$$Lu = Au + Bu = f, f \in H, \quad (1)$$

где A, B - линейные операторы в гильбертовом пространстве H ; $D(A), D(B)$ - области определения.

$D(A)$ - плотно в H . Введём оператор $K: D(K) = D(A)$.

Система базисных (координатных) функций:

$$\{\varphi_i^{(N)}\}, \varphi_i^{(N)} \in D(A), i = 1, 2, \dots, N; N = 1, 2, \dots$$

H_N - линейная оболочка $\varphi_i^{(N)}, i = 1, 2, \dots, N; \{\varphi_i^{(N)}\}$ - базис в H_N

1) при любых N функции $\varphi_i^{(N)}, i = 1, 2, \dots, N$ линейно независимы;

2) последовательность подпространств $\{H_N\}$ предельно плотна в H :
для $\forall u \in H \exists \tilde{u}_N \in H_N, N = 1, 2, \dots$, что

$$\|u - \tilde{u}_N\| = \inf_w \|u - w\| \leq \varepsilon(u, N), w \in H_N, \quad (2)$$

$\varepsilon(u, N) \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$, $\varepsilon(u, N)$ - оценка погрешности аппроксимации.

Введём также базисные функции $\{\psi_j\}, \psi_j \in D(K)$.

Ищем приближённое решение (1) в виде

$$u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i \quad (3)$$

где $a_i, i = 1, 2, \dots, N$ определяются из системы уравнений:

$$(Au_N + Bu_N - f, K\psi_j) = 0, j = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

где (u, v) - скалярное произведение в H и

$$\|u\| = (u, u)^{1/2}.$$

Разрешимость системы (4) и сходимость u_N к u при $N \rightarrow \infty$ зависят от свойств операторов A, B и выбора $K, \{\varphi_i\}, \{\psi_j\}$.

2. Метод Рунца.

$$Au = f, f \in H, \quad (5)$$

где $(Au, v) = (u, Av)$, $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$, $\gamma > 0$, $u, v \in D(A)$.

1) Выбирается базис $\{Y_i\}$, $Y_i \in D(A)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

а) Приближенное решение ищется в виде (3).

б) Коэффициенты a_i находятся из системы уравнений

$$(Au_N, Y_j) = (f, Y_j), j = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

$$\hat{A}a = b, \quad \hat{A} = \{A_{ij}\}, \quad A_{ij} = (AY_i, Y_j), \quad a = (a_1, \dots, a_N)^T,$$

$$b = (f_1, \dots, f_N)^T, \quad f_i = (f, Y_i), \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

Вариационная трактовка метода Рунца: рассмотрим квадратичный функционал энергии

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) \quad (8)$$

Теорема. Для того, чтобы некоторый элемент $u_0 \in D(A)$ соблюдал минимальное значение функционала энергии $F(u)$, необходимо и достаточно, чтобы этот элемент удовлетворял уравнению (5). Такой элемент единственен.

Вариационная задача: найти функцию u_N такую, что

$$F(u_N) = \min_v F(v), \quad u_N, v \in H_N \quad (9)$$

$$\text{Так как } v = \sum_{i=1}^N a_i Y_i, \text{ то } F(u_N) = \min_{a_i} F(v),$$

$$\text{где } F(v) = F(a_1, \dots, a_N) = \sum_{i,j=1}^N a_i a_j (AY_i, Y_j) - 2 \sum_{i=1}^N a_i (f, Y_i) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F(v)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

$$(10) \Rightarrow (7), (6).$$

Теорема. Если для любой функции $u \in D(A)$ можно построить такую последовательность элементов $\tilde{u}_N = \sum_{i=1}^N \tilde{a}_i \varphi_i \in H_N$, $N = 1, 2, \dots$, что $\|A(u - \tilde{u}_N)\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то приближенные решения u_N сходятся к точному решению u_0 уравнения (5) при $N \rightarrow \infty$ и имеет место оценка

$$\|u_0 - u_N\| \leq C \min_{\tilde{a}_i} \|A(u_0 - \tilde{u}_N)\|,$$

где $C > 0$ не зависит от u_0 и $\tilde{u}_N$.

Доказательство. Пусть $v \in D(A)$ -произвольная функция.
 $(A(u_0 - v), u_0 - v) = (Au_0, u_0) + (Av, v) - 2(Au_0, v) =$
 $= (Au_0, u_0) + (Av, v) - 2(f, v) = F(v) + (Au_0, u_0) -$
 $- F(u_0) + F(u_0) = F(v) - F(u_0) + 2(Au_0, u_0) -$
 $- 2(u_0, f) = F(v) - F(u_0) \Rightarrow$

$$(A(u_0 - v), u_0 - v) = F(v) - F(u_0)$$

Поскольку u_0 минимизирует функционал $F(v)$ на $D(A)$, а u_N минимизирует $F(v)$ на H_N , то

$$(A(u_0 - u_N), u_0 - u_N) = F(u_N) - F(u_0) \leq$$

$$\leq F(v_N) - F(u_0) = (A(u_0 - v_N), u_0 - v_N)$$

при произвольной функции $v_N = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i$ из $H_N \Rightarrow$

$$f^2 \|u_0 - u_N\|^2 \leq (A(u_0 - u_N), u_0 - u_N) \leq$$

$$\leq (A(u_0 - v_N), u_0 - v_N) \leq \|A^{-1}\|^2 \|A(u_0 - v_N)\|^2 \Rightarrow$$

$$\|u_0 - u_N\|^2 \leq \frac{\|A^{-1}\|}{\mu^2} \|A(u_0 - v_N)\|^2$$

В силу произвольности выбора коэффициентов $c_i, i = 1, 2, \dots, N$ в разложении v_N , положив $v_N = \tilde{u}_N$ получаем утверждение теоремы.

Замечание. При рассмотрении классической формулировки метода Рунта решение вариационной задачи может не существовать. Введём в $D(A)$ энергетическое скалярное произведение и норму

$$[u, v] = (Au, v), \quad [u] = [u, u]^{1/2} \quad (11)$$

и пополним $D(A)$ по энергетической норме.

Получим энергетическое пространство H_A , порождённое оператором A . В H_A могут появиться предельные элементы не принадлежащие $D(A)$.

Расширим функционал энергии на H_A :

$$F(u) = [u, u] - 2(f, u) \quad (12)$$

и будем искать его минимум на H_A . Пусть минимум достигается на $u_0 \in H_A$. Если $u_0 \notin D(A)$, то u_0 - обобщенное решение (5), если $u_0 \in D(A)$, то u_0 - классическое решение (5).

Граничные условия, которыми удовлетворяют элементы из $D(A)$, называются естественными для оператора A , а граничные условия, которыми удовлетворяют как элементы из $D(A)$, так и элементы из H_A , называются главными. Краевые функции выбираются из H_A .

3. Метод Галёркина.

Основной недостаток метода Рунга: он применим только для самосопряжённых положительно определённых операторов.

Метод Бубнова - Галёркина.

$$L u = A u + B u = f, \quad f \in H \quad (13)$$

- 1) Выбирается базис $\{\varphi_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, $\varphi_i \in D(A)$.
- 2) Приближённое решение ищется в виде (3).
- 3) Коэффициенты a_i определяются из условия ортогональности невязки $L u_N - f$ к $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$:

$$(L u_N - f, \varphi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

Замечание. Если коэффициенты a_i определяются из условия

$$(L u_N - f, \psi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

где $\{\psi_i\} \subset H$ - некоторый базис, то метод называется методом Галёркина - Петрова.

Если $(Au, v) = (u, Av)$, $(Au, u) \geq \mu^2 \|u\|^2$, $\mu > 0$, $u, v \in D(A)$, то можно ввести энергетическое пространство H_A . Тогда (14) $\Rightarrow$

$$[u, v] + (Bu, v) = (f, v), \quad v \in H_A \quad (16)$$

- 1) Выбирается базис $\{\varphi_i\}$, $\varphi_i \in H_A$, $i = 1, 2, \dots, N$
- 2) Приближённое решение ищется в виде (3).
- 3) Коэффициенты a_i определяются из системы уравнений:

$$[u_N, \varphi_i] + (Bu_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i=1, 2, \dots, N \quad (17)$$

$$\hat{L}a = b, \quad \hat{L} = (L_{ij}), \quad L_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j] + (B\varphi_i, \varphi_j), \quad (18)$$

$$a = (a_1, \dots, a_N)^T, \quad b = (f_1, \dots, f_N)^T, \quad f_i = (f, \varphi_i), \quad i=1, 2, \dots, N$$

4. Обобщенный метод моментов.

$$Au + Bu = f, \quad f \in H,$$

$$(Au, Ku) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad (Au, Ku) \geq \beta^2 \|Ku\|^2; \quad \gamma, \beta > 0,$$

$u \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(K)$ - оператор A является K -положительно определенным.

1) Выбирается базис $\{\varphi_i\}$, $\varphi_i \in \mathcal{D}(A)$, $i=1, 2, \dots, N$.

2) Приближенное решение ищется в виде (3).

3) Коэффициенты a_i определяются из системы уравнений:

$$(Au_N + Bu_N - f, K\varphi_i) = 0, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

Замечание. Метод моментов широко используется для решения интегральных уравнений:

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (20)$$

Ищем приближенное решение в виде разложения по полной системе функций $\{\varphi_i(x)\}$:

$$u_N(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x) \quad (21)$$

Коэффициенты a_i определяются из ортогональности невязки ко всем функциям $\{\varphi_i(x)\}$:

$$\int_a^b \left\{ u_N(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) u_N(\xi) d\xi - f(x) \right\} \varphi_j(x) dx = 0, \quad j=1, 2, \dots, N, \quad (22)$$

что приводит к системе:

$$\hat{A} a = b, \quad \hat{A} = (A_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

$$A_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_i(\xi) \varphi_j(x) dx d\xi,$$

$$a = (a_1, \dots, a_N)^T, \quad b = (b_1, \dots, b_N)^T, \quad (23)$$

$$b_i = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_i(x) f(\xi) dx d\xi,$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

Замечание. Если система $\{\varphi_i(x)\}$ ортогональная, то метод моментов эквивалентен замене ядра на специальное вырожденное ядро:

$$\tilde{K}(x, \xi) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) \Phi_i(\xi); \quad \Phi_i(\xi) = \int_a^b K(x, \xi) \varphi_i(x) dx \quad (24)$$

б. Метод наименьших квадратов.

Пусть оператор $A(f)$ имеет ограниченный обратный A^{-1} .

- 1) Выбирается базис $\{\varphi_i\}$, $\varphi_i \in D(A)$, $i = 1, 2, \dots, N$.
- 2) Приближённое решение ищется в виде (3).
- 3) Коэффициенты a_i определяются из системы уравнений:

$$(A u_N, A \varphi_i) = (f, A \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (25)$$

$$\hat{A} a = b, \quad \hat{A} = (A_{ij}), \quad A_{ij} = (A \varphi_i, A \varphi_j), \quad \hat{A} = \hat{A}^T;$$

$$i, j = 1, \dots, N; \quad a = (a_1, \dots, a_N)^T, \quad b = (f_1, \dots, f_N)^T,$$

$$f_i = (f, A \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Замечание. Соотношения (25) можно получить из условия минимизации функционала невязки $J(u) = \|Au - f\|^2$ на H_N .

§3. Метод конечных разностей.

1. Основные понятия.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} L u(x) = f(x), & x \in D, \\ \ell u(x) = \mu(x), & x \in I, \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

где L - линейный дифференциальный оператор,
 ℓ - оператор дополнительных (начальных, граничных)
условий, $\bar{D} = D + I$.

$\bar{D}$ заменим на $\bar{\omega}_h$ - дискретное множество узлов-
сетки, $u(x)$, $x \in \bar{D}$ заменим на $u_h(x_n)$ - сеточные
функции (зависят от параметра h), $x_n \in \bar{\omega}_h$.

$u(x) \in H_0$, $u_h(x_n) \in H_h$. Пространство H_0
отображается на пространство H_h :

$u(x) \in H_0 \sim u_h(x) = P_h u(x)$, $u_h \in H_h$,
где P_h - линейный оператор из H_0 в H_h .

На линейном пространстве H_h вводится сеточ-
ные нормы $\|u_h\|_h$ - аналоги норм в пространстве H_0 .

Условие согласования норм:

$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0$, где $u_h = P_h u$, $\|u\|_0$ -
норма в пространстве H_0 .

Пусть $g_h(x) = P_h f(x)$, $x \in \omega_h$, $\chi_h(x) = P_h \mu(x)$,
 $x \in I_h$, где $\bar{\omega}_h = \omega_h + I_h$, ω_h - множество внут-
ренних узлов, I_h - множество граничных узлов.

Перейдём от дифференциальных операторов к разностным: $L \rightarrow L_h, \ell \rightarrow \ell_h$.

Будем говорить, что L_h аппроксимирует L с порядком $m > 0$ в точке x , если

$$\psi(x) = L_h u(x) - L u(x) = \underline{O}(|h|^m). \quad (3)$$

Задаче (1)-(2) ставится в соответствие система алгебраических (разностных) уравнений

$$\begin{cases} L_h u_h(x) = f_h(x), & x \in \omega_h, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \ell_h u_h(x) = \chi_h(x), & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (5)$$

Система уравнений (4), (5), зависящая от параметра h , называется разностной схемой.

Пусть $\xi_h = u_h - u_h$, где $u_h = f_h u$. Так как L_h и ℓ_h - линейные операторы, то получаем задачу:

$$\begin{cases} L_h \xi_h = \psi_h, & x \in \omega_h, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \ell_h \xi_h = \varphi_h, & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (7)$$

где ψ_h и φ_h - погрешности аппроксимации на решении $u(x)$ разностной схемой уравнение (1) и дополнительного условия (2). Система (4)-(5):

а) аппроксимирует задачу (1)-(2) и имеет m -й порядок аппроксимации, если

$$\|\psi_h\|_{(2h)} = \underline{O}(|h|^m), \quad \|\varphi_h\|_{(3h)} = \underline{O}(|h|^m) \quad (8)$$

б) сходится и имеет m -й порядок точности, если

$$\|u_h - u_h\|_{(1h)} = \underline{O}(|h|^m). \quad (9)$$

Схема (4)-(5) корректна (разностная задача поставлена корректно), если при всех достаточно малых $|h| \leq h_0$:

а) разностная задача однозначно разрешима при любых входных данных $\mathcal{I}_h, \mathcal{X}_h$ и

б) решение Y_h равномерно по h непрерывно зависит от входных данных (свойство устойчивости).

Если L_h и $\mathcal{V}_h$ - линейные операторы, то при $|h| \leq h_0$

$$\|Y_h\|_{(1h)} \leq M_1 \|\mathcal{I}_h\|_{(2h)} + M_2 \|\mathcal{X}_h\|_{(3h)}, \quad (10)$$

где $M_1 > 0, M_2 > 0$ - постоянные не зависящие от h и выбора входных данных $\mathcal{I}_h$ и $\mathcal{X}_h$.

Если схема (4), (5) устойчива, а Z_h - решение задачи (6), (7), то (10) $\Rightarrow$

$$\|Y_h - U_h\|_{(1h)} = \|Z_h\|_{(1h)} \leq M_1 \|\Psi_h\|_{(2h)} + M_2 \|\mathcal{V}_h\|_{(3h)} \quad (11)$$

Из неравенства (11) следует утверждение:

Если линейная схема (4)-(5) устойчива и аппроксимирует задачу (1)-(3), то она сходится (из устойчивости и аппроксимации линейной схемой следует её сходимость).

Порядок точности схем (4)-(5) определяется порядком аппроксимации.

2. Дифференциальная геометрия

инвариантные методы

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2) \\ u(0, t) = u_0, \quad u(l, t) = u_1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3) \end{array} \right.$$

Дифференциальная геометрия

Векторное поле

$$\bar{u}_h \equiv \{x_n = nh; n = 0, 1, \dots, N; hN = l\}$$

$$\bar{u}_t \equiv \{t_s = s\tau; s = 0, 1, \dots, N; \tau N = T\}$$

$$\bar{u}_{ht} \equiv \bar{u}_h \times \bar{u}_t = \{(x_n, t_s) \in \bar{D}\},$$

$$\bar{D} \equiv \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}.$$

Матрица вариации инвариантов, на котором инварианты определяются.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x} g(x, t) = u_t - u_x g(x, t) \quad (1)$$

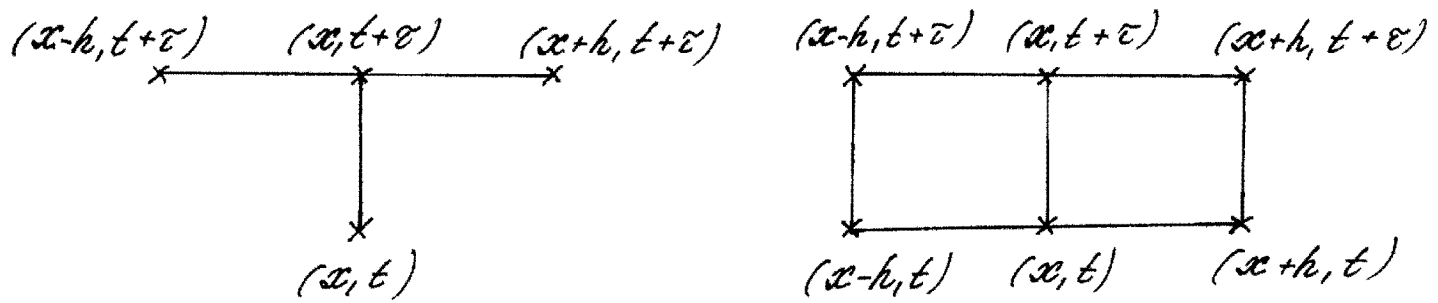
$$u_t = u_t(x, t), \quad u_x = u_x(x, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x} g(x, t) \quad (2)$$

$$\begin{array}{c} (x, t) \\ (x+h, t) \\ (x, t+\tau) \end{array}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x} g(x, t) \quad (3)$$

$$\begin{array}{l} u_t(x, t) = f(x, t) - g(x, t) u_x(x, t) \\ u_x(x, t) = g(x, t) u_t(x, t) - f(x, t) \end{array}$$



$$L_{h\tau}^{(1)} w = w_t - \hat{w}_{\bar{x}x} \quad (18)$$

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} w = w_t - (\sigma \hat{w}_{\bar{x}x} + (1-\sigma) w_{\bar{x}x}) \quad (19)$$

$$w_t = \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = \underline{O}(\tau^2) \quad (20)$$

$$w_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) = \underline{O}(h^4)$$

Подставляя (20) в (17), (18), получим

$$\psi^{(0)} = L_{h\tau}^{(0)} w - L w(x, t) = \underline{O}(h^2 + \tau) \quad (21)$$

$$\psi^{(1)} = L_{h\tau}^{(1)} w - L w(x, t) = \underline{O}(h^2 + \tau) \quad (22)$$

При $\sigma = 0,5$ ("симметричная схема")

$$\psi^{(0,5)} = L_{h\tau}^{(0,5)} w - L w(x, t + \frac{\tau}{2}) = \underline{O}(h^2 + \tau^2), \quad (23)$$

где ψ - погрешность аппроксимирующего оператора L соответствующим разностным оператором $L_{h\tau}$.

Добавляя к разностному уравнению разностные начальные и граничные условия, аппроксимирующие условия (13) и (14), получим разностную начально-краевую задачу (модель):

$$\begin{cases} L_{h\varepsilon}^{(\sigma)} y \equiv y_t - (\sigma \hat{y}_{\bar{x}x} + (1-\sigma) y_{\bar{x}x}) = \mathcal{I}, (x_n, t_s) \in \bar{\omega}_{h\varepsilon} & (24) \\ y(x, 0) = u_0(x), x = x_n \in \bar{\omega}_h, & (25) \\ y(0, t) = \mu_0, y(1, t) = \mu_1, t = t_s \in \bar{\omega}_\varepsilon, & (26) \end{cases}$$

где $\mathcal{I} = \mathcal{I}_n^s = \mathcal{I}(x_n, t_s)$.

Схема (24)-(26) аппроксимирует задачу (12)-(14) с порядком $\underline{O}(h^2 + \varepsilon)$ при $\sigma = 0, \sigma = 1$ и $\underline{O}(h^2 + \varepsilon^2)$ при $\sigma = 0,5$.

Схема называется явной, если $\sigma = 0$. При $\sigma \neq 0$ схема называется неявной (при $\sigma = 1$ - чисто неявной).

Явная схема ($\sigma = 0$):

$$y_n^{s+1} = y_n^s + \frac{\varepsilon}{h^2} (y_{n-1}^s - 2y_n^s + y_{n+1}^s) + \varepsilon \mathcal{I}_n^s \quad (27)$$

$$n = 1, 2, \dots, N-1; s = 0, 1, \dots, S.$$

Чисто неявная схема ($\sigma = 1$):

$$\frac{1}{h^2} y_{n-1}^{s+1} - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{\varepsilon} \right) y_n^{s+1} + \frac{1}{h^2} y_{n+1}^{s+1} = - \left(\frac{1}{\varepsilon} y_n^s + \mathcal{I}_n^s \right) \quad (28)$$

$$n = 1, 2, \dots, N-1; s = 0, 1, \dots, S.$$

Теорема. Для устойчивости разностной схемы (24)-(26) достаточно, чтобы существуют такие не зависящие от h и ε положительные $C_1 \geq 0$ и $C_2 > 0$, при которых имеет место оценка

$$\|y^{s+1}\| \leq (1 + C_1 \varepsilon) \|y^s\| + C_2 \varepsilon \|\mathcal{I}\| \quad (29)$$

Замечание. В (29) будем считать:

$$\text{равномерная (соболевская): } \|y\| = \max_{n,s} |y_n^s| \quad (30)$$

$$\text{на } s\text{-м слое: } \|y^s\| = \max_n |y_n^s| \quad (31)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|y^{s+1}\| &\leq (1+C_1\varepsilon)\|y^s\| + C_2\varepsilon\|y\| \leq (1+C_1\varepsilon)\{(1+C_1\varepsilon)\|y^{s-1}\| + \\ &+ C_2\varepsilon\|y\|\} + C_2\varepsilon\|y\| = (1+C_1\varepsilon)^2\|y^{s-1}\| + C_2\varepsilon\|y\|\{1 + \\ &+ (1+C_1\varepsilon)\} \leq \dots \leq (1+C_1\varepsilon)^{s+1}\|y^0\| + C_2\varepsilon\|y\|\{1 + \\ &+ (1+C_1\varepsilon) + \dots + (1+C_1\varepsilon)^s\} \leq (1+C_1\varepsilon)^{m+1}\|u_0\| + \\ &+ C_2\varepsilon(m+1)(1+C_1\varepsilon)^m\|y\|, \quad s \leq m, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\text{Так как } (1+C_1\varepsilon)^m \leq (1+C_1\varepsilon)^M \leq e^{C_1\varepsilon M} = e^{C_1 T} \quad (33)$$

при $m \leq M$, то полагаем $M_1 = e^{C_1 T}$, $M_2 = C_2 T M_1 \Rightarrow$

$$\|y\| \leq M_1\|u_0\| + M_2\|y\|. \quad (34)$$

Рассмотрим устойчивость схемы наклонной линии ($\sigma=1$).

$$(28) \Rightarrow y_n^{s+1} = y_n^s - y\{2y_n^{s+1} - y_{n+1}^{s+1} - y_{n-1}^{s+1}\} + \varepsilon y_n^s, \quad y = a \frac{\varepsilon}{h^2} \quad (35)$$

$$y_{n_0}^{s+1} = \max_n y_n^{s+1} \geq y_n^{s+1} \Rightarrow \quad (36)$$

$$2y_{n_0}^{s+1} - y_{n_0+1}^{s+1} - y_{n_0-1}^{s+1} \geq 0 \Rightarrow \quad (37)$$

$$y_{n_0}^{s+1} \leq y_{n_0}^s + \varepsilon y_{n_0}^s \quad (38)$$

$$y_{l_0}^{s+1} = \min_n y_n^{s+1} \leq y_n^{s+1} \Rightarrow \quad (39)$$

$$2y_{l_0}^{s+1} - y_{l_0+1}^{s+1} - y_{l_0-1}^{s+1} \leq 0 \Rightarrow \quad (40)$$

$$y_{l_0}^{s+1} \geq y_{l_0}^s + \varepsilon y_{l_0}^s \quad (41)$$

$$(38), (41) \Rightarrow y_{l_0}^s + \varepsilon y_{l_0}^s \leq y_{l_0}^{s+1} \leq y_n^{s+1} \leq y_{k_0}^{s+1} \leq y_{k_0}^s + \varepsilon y_{k_0}^s \quad (42)$$

$$(42) \Rightarrow |y_n^{s+1}| \leq \|y^s\| + \varepsilon \|y\| \quad (43)$$

$$(43) \Rightarrow \|y^{s+1}\| \leq \|y^s\| + \varepsilon \|y\| \quad (44)$$

Рассмотрим устойчивость явной схемы ($\sigma=0$).

$$(27) \Rightarrow y_n^{s+1} = (1-2\mu) y_n^s + \mu y_{n+1}^s + \mu y_{n-1}^s + \varepsilon y_n^s \quad (45)$$

Пусть $\mu < \frac{1}{2}$. Тогда $1-2\mu > 0$ и получим

$$\begin{aligned} |y_n^{s+1}| &\leq (1-2\mu) |y_n^s| + \mu |y_{n+1}^s| + \mu |y_{n-1}^s| + \varepsilon |y_n^s| \leq \\ &\leq (1-2\mu + \mu + \mu) \|y^s\| + \varepsilon \|y\| = \|y^s\| + \varepsilon \|y\| \end{aligned} \quad (46)$$

$$(46) \Rightarrow \|y^{s+1}\| \leq \|y^s\| + \varepsilon \|y\| \quad (47)$$

Пусть $\delta y_n^s = (-1)^n \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ - ошибка на s -м слое.

$$\begin{aligned} \delta y_n^{s+1} &= (1-2\mu) \delta y_n^s + \mu \delta y_{n+1}^s + \mu \delta y_{n-1}^s = (-1)^n \varepsilon (1-2\mu - \mu - \mu) = \\ &= (-1)^{n+1} (4\mu - 1) \varepsilon \end{aligned} \quad (48)$$

$\mu > \frac{1}{4} \Rightarrow |\delta y_n^{s+k}| = (4\mu - 1)^k \varepsilon$, $4\mu - 1 > 1 \Rightarrow$ ошибка неограниченно возрастает, причём с увеличением номера ошибки квадраты (увеличиваются много раз).

Вывод. Число явная схема является безусловно устойчивой. Явная схема является условно устойчивой при выполнении условия

$$\mu < \frac{1}{4} \text{ или } \varepsilon < \frac{h^2}{2a^2} \quad (49)$$

3. Метод прогонки.

$$\begin{cases} A_n y_{n-1} - C_n y_n + B_n y_{n+1} = -F_n, n=1, 2, \dots, N-1 & (50) \\ y_0 = \alpha_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \alpha_2 y_{N-1} + \mu_2 & (51) \end{cases}$$

$$A_n \neq 0, B_n \neq 0, n=1, 2, \dots, N-1.$$

$$y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}, n=0, 1, \dots, N-1 \quad (52)$$

(52) $\Rightarrow$

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n = \alpha_n \alpha_{n+1} y_{n+1} + \alpha_n \beta_{n+1} + \beta_n \quad (53)$$

$$\begin{aligned} (52), (53), (50) \Rightarrow & (\alpha_{n+1} (\alpha_n A_n - C_n) + B_n) y_{n+1} + \\ & + (\beta_{n+1} (\alpha_n A_n - C_n) + \beta_n A_n + F_n) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

(54) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{Прямой} \\ \text{ход:} \quad \alpha_{n+1} &= \frac{B_n}{C_n - \alpha_n A_n} \\ \beta_{n+1} &= \frac{A_n \beta_n + F_n}{C_n - \alpha_n A_n} \quad n=1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (55)$$

$$(51), (52) \quad n=0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_1, \beta_1 = \mu_1. \quad (56)$$

$$(51), (52) \quad n=N-1 \Rightarrow y_N = \frac{\mu_2 + \beta_N \alpha_2}{1 - \alpha_N \alpha_2} \quad (57)$$

$$\text{Обратный ход: } y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}, n=N-1, N-2, \dots, 0 \quad (58)$$

Достаточные условия устойчивости:

$$|C_n| \geq |A_n| + |B_n|, n=1, 2, \dots, N-1, \quad (59)$$

$$|\alpha_2| \leq 1, \alpha=1, 2, |\alpha_1| + |\alpha_2| < 2$$

Число арифметических операций прогонки $\approx O(N)$.

Покажем, что $(59) \Rightarrow |\alpha_i| \leq 1, i=1, 2, \dots, N$

Индукция: а) $|\alpha_1| = |\alpha_1| \leq 1$; б) $|\alpha_i| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_{i+1}| \leq 1$

$$(59) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| - |B_i| \geq |C_i| - |\alpha_i| |A_i| - |B_i| \geq \\ \geq |A_i| (1 - |\alpha_i|) \geq 0 \quad (59a)$$

$$B_i \neq 0, (59a) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| > 0$$

$$(59a) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| \geq |B_i| \Rightarrow$$

$$|\alpha_{i+1}| = \frac{|B_i|}{|C_i - \alpha_i A_i|} \leq 1$$

Покажем, что $|\alpha_i| < 1 \Rightarrow |\alpha_{i+1}| < 1$.

$$\text{Если } |\alpha_i| < 1, \text{ то } A_i \neq 0, (59a) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| > |B_i| \Rightarrow \\ |\alpha_{i+1}| < 1.$$

Покажем, что $(59) \Rightarrow 1 - \alpha_N \alpha_2 \neq 0$.

$$\text{а) } |\alpha_2| < 1 \Rightarrow |\alpha_1| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_1| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_N| \leq 1 \Rightarrow \\ |1 - \alpha_N \alpha_2| \geq 1 - |\alpha_N| |\alpha_2| \geq 1 - |\alpha_2| > 0.$$

$$\text{б) } |\alpha_2| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_N| < 1 \Rightarrow \\ |1 - \alpha_N \alpha_2| \geq 1 - |\alpha_N| |\alpha_2| \geq 1 - |\alpha_N| > 0.$$

При $|\alpha_i| \leq 1$ ошибка $\delta y_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}$ не убывает: $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \tilde{y}_i = \alpha_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \beta_{i+1} \Rightarrow$

$$\delta y_i = \alpha_{i+1} \delta y_{i+1} \Rightarrow |\delta y_i| = |\alpha_{i+1}| |\delta y_{i+1}| \leq |\delta y_{i+1}|$$

Если $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ возмущаются, то $\max_{1 \leq i \leq N} |\delta y_i| \approx \varepsilon_0 N^2$, где ε_0 - ошибка округления.

4. Экономические разностные схемы. Схема переменных направлений.

Схемы применяются для решения многомерных задач и состояющие в себе достоинства явных и неявных схем используются экономически.

Экономическая разностная схема:

- 1) является безусловно устойчивой,
- 2) требует при переходе со слоя на слой малого числа дифференциальных операций, пропорционального числу узлов сетки.

Схема переменных направлений (Тиссен и Векфорд 1955.)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (60)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{D}, \quad (61)$$

$$u(x, t) = \mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T], \quad (62)$$

$$L u \equiv \Delta u = L_1 u + L_2 u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$\bar{D} \equiv \{ 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha; \alpha = 1, 2 \}, \quad Q_T \equiv D \times (0, T], \quad x = (x_1, x_2)$$

$$\frac{y^{s+\frac{1}{2}} - y^s}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^s + \mathcal{F}^s, \quad (63)$$

$$\frac{y^{s+1} - y^{s+\frac{1}{2}}}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^{s+1} + \mathcal{F}^s, \quad (64)$$

$x \in \omega_h$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (65)$$

$$y^{s+1} = \mu \quad n_2 = 0, \quad n_2 = N_2, \quad (66a)$$

$$y^{s+\frac{1}{2}} = \mu \quad n_1 = 0, \quad n_1 = N_1, \quad (66b)$$

$$\bar{\omega}_h \equiv \bar{\omega}_{h_1 h_2} = \omega_h + f_h \equiv \{ (x_{n_1}, x_{n_2}) \in \bar{D}; 0 \leq n_\alpha \leq N_\alpha; \alpha = 1, 2 \},$$

$$L\mathcal{U} \rightarrow \Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y, \quad \Lambda_\alpha y = y \bar{x}_\alpha x_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$t = t_{s+\frac{1}{2}} = t_s + 0,5\tau; \quad \bar{y} = y^{s+\frac{1}{2}}$$

$$(63) \Rightarrow \frac{2}{\tau} \bar{y} - \Lambda_1 \bar{y} = F, \quad \text{где } F = \frac{2}{\tau} y + \Lambda_2 y + \mathcal{F} \quad (67)$$

$$(64) \Rightarrow \frac{2}{\tau} \hat{y} - \Lambda_2 \hat{y} = \bar{F}, \quad \text{где } \bar{F} = \frac{2}{\tau} \bar{y} + \Lambda_1 \bar{y} + \mathcal{F} \quad (68)$$

$$(67) \Rightarrow \frac{1}{h_1^2} \bar{y}_{n_1-1} - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{\tau}\right) \bar{y}_{n_1} + \frac{1}{h_1^2} \bar{y}_{n_1+1} = -F_{n_1}, \quad (69)$$

$$n_1 = 1, 2, \dots, N_1-1,$$

$$\bar{y}_{n_1} = \mu_{n_1} \quad n_1 = 0, n_1 = N_1, \quad (70)$$

$$(68) \Rightarrow \frac{1}{h_2^2} \hat{y}_{n_2-1} - 2\left(\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{\tau}\right) \hat{y}_{n_2} + \frac{1}{h_2^2} \hat{y}_{n_2+1} = -\bar{F}_{n_2}, \quad (71)$$

$$\hat{y}_{n_2} = \mu_{n_2} \quad n_2 = 0, n_2 = N_2, \quad (72)$$

$$x_n = (n_1 h_1, n_2 h_2), \quad F = F_{n_1 n_2}, \quad y = y_{n_1 n_2},$$

фиксированной ширине не пишется.

Прогонка вдоль каждой строки $n_2 = 1, 2, \dots, N_2-1$ требует $O(N_1)$ арифметических операций - всего $O(N_1 N_2)$.

Прогонка вдоль каждой строки $n_1 = 1, 2, \dots, N_1-1$ требует $O(N_2)$ операций - всего $O(N_1 N_2)$. Вит по всем направлениям требует много арифметических операций $O(N_1 N_2)$ пропорционального количеству узлов сетки и на каждой узел приходится много операций, не зависящее от числа узлов.

5. Консервативные однородные разностные схемы.

Под однородными разностными схемами (ОРС) понимаются такие схемы, вид которых не зависит ни от выбора конкретной задачи из данной массы, ни от выбора разностной сетки. Коэффициенты ОРС определяются как функционалы коэффициентов дифференциального уравнения ("шаблонные функционалы").

ОРС квадратного (или непрерывного) счёта.

Схемы, выражающие на сетке законы сохранения, называются консервативными или дивергентными.

Схемы, нарушающие законы сохранения, называются неконсервативными или дисбалансными.

1) Интерпо-интерполяционный метод (ИИМ) - метод баланса.

Равновесное уравнение

$$(K(x)u'(x))' - g(x)u(x) = -f(x), \quad (1)$$

где $K(x)$ и $g(x)$ могут быть разрывными.

Уравнение (1) описывает стационарное распределение тепла в стержне. Введём равномерную сетку ω_h и промежуточные потоковые узлы $x_{i\pm 0.5} = x_i \pm 0.5h$.

Законы сохранения тепла (уравнение баланса) на отрезке $[x_{i-0.5}, x_{i+0.5}]$:

$$W_{i-0.5} - W_{i+0.5} - \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} g(x)u(x)dx + \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)dx = 0, \quad (2)$$

где $W(x) = -\kappa(x) \frac{du}{dx}$ - меновой номер.

Предположим, что $u = u_i = \text{const}$ при $x_{i-0.5} \leq x \leq x_{i+0.5}$.

Тогда
$$\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} g(x) u(x) dx \approx h u_i d_i, \quad (3)$$

где
$$d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} g(x) dx. \quad (4)$$

Проинтегрируем равенство $\frac{du}{dx} = -\frac{W}{\kappa}$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$:

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{\kappa(x)} dx. \quad (5)$$

Положим $W = W_{i-0.5} = \text{const}$ при $x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}$.

Тогда
$$u_{i-1} - u_i \approx W_{i-0.5} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{\kappa(x)} \quad (6)$$

или

$$W_{i-0.5} \approx -a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -a_i u_{\bar{x},i}, \quad (7)$$

где
$$a_i = \left\{ \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{\kappa(x)} \right\}^{-1} \quad (8)$$

(2)-(4), (6)-(8) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{h} \left\{ a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right\} - d_i y_i = -g_i, \quad (9)$$

где
$$g_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx \quad (10)$$

2) Метод конечных элементов (МКЭ) - проекционно-сеточный метод.

Рассмотрим краевую задачу:

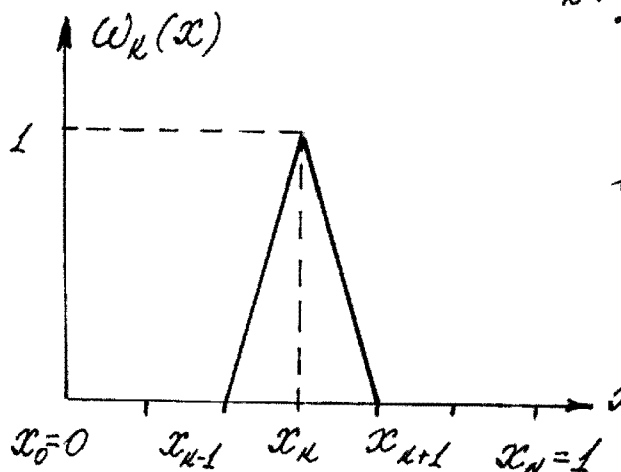
$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x), & 0 < x < 1, & (11) \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. & & (12) \end{cases}$$

Покроем отрезок $0 \leq x \leq 1$ системой интервалов $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ и для каждого $k \geq 1$ введём функцию $\omega_k(x)$:

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_{k-1}, \\ \tilde{\omega}_1(x), & x_{k-1} \leq x \leq x_k, \\ \tilde{\omega}_2(x), & x_k \leq x \leq x_{k+1}, \\ 0, & x_{k+1} \leq x \leq x_N = 1, \end{cases} \quad (13)$$

где $\tilde{\omega}_1(x) = \frac{x - x_{k-1}}{\Delta_{k-\frac{1}{2}}}, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad \Delta_{k-\frac{1}{2}} = x_k - x_{k-1},$ (14)

$$\tilde{\omega}_2(x) = \frac{x_{k+1} - x}{\Delta_{k+\frac{1}{2}}}, \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}, \quad \Delta_{k+\frac{1}{2}} = x_{k+1} - x_k$$



Система функций $\{\omega_k(x)\}$ полна в том смысле, что любую непрерывную кусочно-линейную функцию $\varphi(x)$ с заданными значениями в узловых точках $\{x_k\}$ и обращающуюся в нуль в граничных точках

отрезка $[0, 1]$ можно представить в виде линейной комбинации функций $\{\omega_k(x)\}$:

$$Y(x) = \sum_k Y_k \omega_k(x),$$

где в качестве коэффициентов стоят значения самой функции $Y(x)$ в точках x_k : $Y_k = Y(x_k)$.

Система $\{\omega_k(x)\}$ обладает также некоторыми аналогичными свойствами ортогональности:

$$(\omega_k, \omega_n) = \int_0^1 \omega_k(x) \omega_n(x) dx = \begin{cases} 0, & n \leq k-2, \\ \frac{1}{6} \Delta_{k-\frac{1}{2}}, & n = k-1, \\ \frac{1}{3} (\Delta_{k-\frac{1}{2}} + \Delta_{k+\frac{1}{2}}), & n = k, \\ \frac{1}{6} \Delta_{k+\frac{1}{2}}, & n = k+1, \\ 0, & n \geq k+2. \end{cases} \quad (15)$$

$$(11) \Rightarrow \int_0^1 \left\{ -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u - f(x) \right\} \omega_k(x) dx = 0 \quad (16)$$

$$(16), (16) \Rightarrow \int_0^1 \left\{ p(x) \frac{du}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} + (q(x)u - f(x)) \omega_k \right\} dx = 0 \quad (17)$$

$$(13), (17) \Rightarrow \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \left\{ p(x) \frac{du}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} + (q(x)u - f(x)) \omega_k \right\} dx = 0 \quad (18)$$

Ищем решение задачи (11)-(12) в виде разложения по системе $\{\omega_k(x)\}$:

$$u(x) = \sum_k u_k \omega_k(x) \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 (18), (19) \Rightarrow \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) \frac{du}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} dx &= \frac{p_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta_{k-\frac{1}{2}}} (u_k - u_{k-1}), \\
 \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) \frac{du}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} dx &= -\frac{p_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta_{k+\frac{1}{2}}} (u_{k+1} - u_k), \\
 \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x) u \omega_k dx &= g_{k-\frac{1}{2}}^{1,2} u_{k-1} + g_{k-\frac{1}{2}}^{1,1} u_k, \\
 \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x) u \omega_k dx &= g_{k+\frac{1}{2}}^{2,2} u_k + g_{k+\frac{1}{2}}^{1,2} u_{k+1},
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\text{где} \quad p_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta_{k+\frac{1}{2}}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) dx,$$

$$g_{k+\frac{1}{2}}^{ij} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_i(x) \omega_j(x) g(x) dx, \quad i, j = 1, 2.$$

$$\tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 (18), (20) \Rightarrow & \frac{p_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta_{k-\frac{1}{2}}} (u_k - u_{k-1}) - \frac{p_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta_{k+\frac{1}{2}}} (u_{k+1} - u_k) + \\
 & + g_{k-\frac{1}{2}}^{1,2} u_{k-1} + (g_{k-\frac{1}{2}}^{1,1} + g_{k+\frac{1}{2}}^{2,1}) u_k + g_{k+\frac{1}{2}}^{1,2} u_{k+1} = F_k,
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\text{где} \quad F_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \omega_1 dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \omega_2 dx = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x) \omega_k(x) dx$$

$$\tag{23}$$

К уравнению (22) следует добавить граничные условия:

$$u_0 = 0, \quad u_N = 0$$

$$\tag{24}$$

§ 4. Асимптотические методы.

Получение формул, описывающих качественное поведение решения на некотором интервале.

1. Метод малого параметра.

1) Регулярное возмущение.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu), \quad y(0, \mu) = y^0 \quad (1)$$

Пусть параметр μ принимает в некоторой окрестности значений $\mu = 0$. Предположим, что при $\mu = 0$ решение задачи (1) существует. Нас интересует решение при $\mu \neq 0$, но достаточно малом.

Теорема. Если функции $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны по всем переменным y, t, μ в D , где

$$D \equiv \{t \leq a, |y - y^0| \leq b, |\mu| \leq c\},$$

то решение задачи (1) непрерывно по t и параметру μ при $t \in [0, T], |\mu| \leq c$. Здесь $T = \min\{a, \frac{b}{M}\}$,
 $M: |f(y, t, \mu)| \leq M$.

Рассмотрим задачу (1) при $\mu = 0$:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y}, t, 0), \quad \bar{y}(0) = y^0 \quad (2)$$

Из теоремы следует, что при $t \in [0, T]$

$$y(t, \mu) = \bar{y}(t) + \varepsilon(t, \mu), \quad (3)$$

где $\varepsilon(t, \mu) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Формула (3) - асимптотическая формула
(асимптотическое представление) решения $y(t, \mu)$
по малому параметру μ .

Асимптотическими формулами по малому параметру мы будем называть такие формулы, в которых некоторые члены, называемые остаточными членами, вписываются не точно, а указывается лишь их свойства при $\mu \rightarrow 0$, например порядок стремления к нулю при $\mu \rightarrow 0$. В решении задачи μ является малой, но не бесконечно малой величиной. Поэтому асимптотические формулы позволяют отбросить точности бесконечно не могут и в этом же принципиальный недостаток. Асимптотические формулы удобны тогда, когда нужно получить качественную картину решения.

Разложим функцию $f(y, t, \mu)$ в ряд по степеням μ (предполагая, что она обладает нужным числом производных по μ и y):

$$f(y, t, \mu) = f_0(y, t, 0) + \mu f_1(y, t, 0) + \mu^2 f_2(y, t, 0) + \dots \quad (4)$$

где $f_k(y, t, 0)$ ($k=0, 1, \dots$) - тензорные коэффициенты.

Представим решение задачи (1) в виде формального степенного ряда:

$$y(t) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \dots \quad (5)$$

(1), (4), (5) $\Rightarrow$

$$y_0' + \mu y_1' + \mu^2 y_2' + \dots = f_0(y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots, t, 0) + \mu f_1(y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots, t, 0) + \dots \quad (6)$$

$$y_0' + \mu y_1' + \mu^2 y_2' + \dots = f_0(y_0, t, 0) + (\mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots) \frac{\partial f_0}{\partial y}(y_0, t, 0) + \frac{1}{2} (\mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots)^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}(y_0, t, 0) + \dots + \mu f_1(y_0, t, 0) + \mu (\mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots) \frac{\partial f_1}{\partial y}(y_0, t, 0) + \dots \quad (7)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ :

$$y_0' = f_0(y_0, t, 0) \equiv f(y_0, t, 0),$$

$$y_1' = y_1 \frac{\partial f_0}{\partial y} + f_1,$$

$$y_2' = y_2 \frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{y_1^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + y_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2, \quad (8)$$

$$y_k' = y_k \frac{\partial f_0}{\partial y} + F_k(f_i, y_i) \quad (i=0, 1, \dots, k-1)$$

Считая, что y, t изменяются в ограниченной области D и $|\mu| \leq \mu_0$, получим оценку приближенного решения, даваемого конечной суммой

$$s_k = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots + \mu^k y_k. \quad (9)$$

$$\text{Пусть } u = y - s_k \Rightarrow$$

$$u' + s_k' = f(u + s_k, t, \mu) = f(s_k, t, \mu) + \frac{\partial f^*}{\partial y}(y^*, t, \mu) u \Rightarrow$$

$$u' - \frac{\partial f^*}{\partial y} \cdot u = -s_k' + f(s_k, t, \mu) \equiv R_k, \quad (10)$$

$$\text{где } R_k = s_k' - f(y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots + \mu^k y_k, t, \mu) = O(\mu^{k+1})$$

так как все члены разложения f до μ^k включительно устремлены уравнениями (8) для y_i ($i=0, 1, \dots, k$) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} u' + p(t)u = O(\mu^{k+1}), & t > 0, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{где } p(t) = -\frac{\partial f^*}{\partial y}, \quad |p(t)| < K.$$

Запишем и оценим решение задачи (11):

$$u(t) = \int_0^t \underline{O}(\mu^{\kappa+1}) e^{-\int_{\sigma}^t p(\theta) d\theta} d\sigma \Rightarrow \quad (12)$$

$$|u(t)| \leq C \mu^{\kappa+1} \int_0^t e^{\kappa|t-\sigma|} d\sigma \Rightarrow \quad (13)$$

$$\left| y - \sum_{i=0}^{\kappa} \mu^i y_i \right| \leq A \mu^{\kappa+1}, \quad (14)$$

то есть получено решение с погрешностью $\sim \mu^{\kappa+1}$.

Ряд (5) называется асимптотическим рядом или асимптотическим разложением по малому параметру μ для $y(t, \mu)$. Подчеркнём, что $\varepsilon_{\kappa+1}(t, \mu) = \underline{O}(\mu^{\kappa+1})$ при фиксированном κ и $\mu \rightarrow 0$. Если же μ фиксировано, а $\kappa \rightarrow \infty$, то $\varepsilon_{\kappa+1}(t, \mu)$ может предела не иметь, т.е. построенный ряд (5) сходящийся, вообще говоря, не является.

Малые члены, отброшенные в уравнении, называются возмущениями. Уравнение (4) называется невозмущённым уравнением, а уравнение (1) возмущённым.

Если μ вводит в $f(y, t, \mu)$ регулярным (непрерывным) образом, то получим регулярное возмущение.

а) Симулярные возмущения.

Уравнения движения маятника в форме с соответствием:

$$\begin{cases} \mu y'' + \alpha y' + \kappa y = f(t), \quad t > 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} y(0) = y^0; \quad y'(0) = y_1^0, \end{cases} \quad (16)$$

где $\mu = I$ - момент инерции тела относительно оси вращения.

Если $\mu = 0$, то порядок уравнения (15) снижается и оба условия (16) учесть уже нельзя. Поэтому в окрестности начальной точки правильной модели мы не получим.

В данном случае говорить о нормальной или вырожденной зависимости от μ и о сингулярных возмущениях.

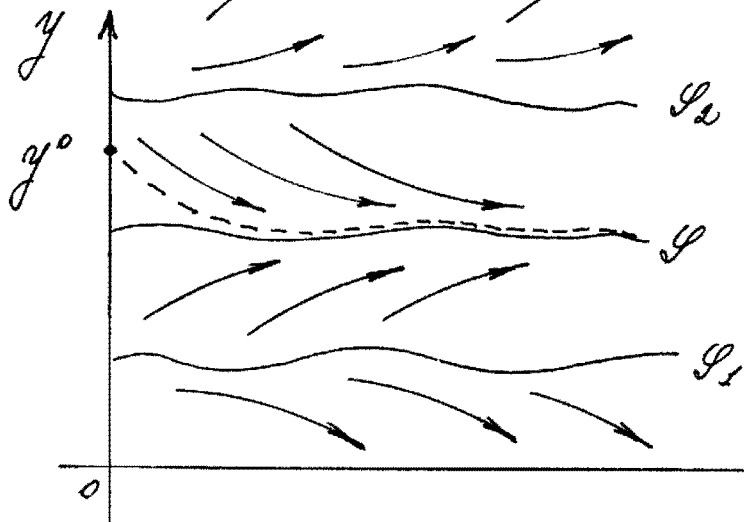
Рассмотрим задачу Тихонова:

$$\begin{cases} \mu \frac{dy}{dt} = f(y, t), & 0 < t \leq T, \\ y(0) = y^0 \end{cases} \quad (17)$$

Вырожденное уравнение ($\mu = 0$): $f(y, t) = 0$ (19) может иметь несколько решений $\bar{y}_i = \bar{y}_i(t)$. К какому из них будет сходиться решение $y(t)$ при $\mu \rightarrow 0$?

Корень $\bar{y} = \bar{y}(t)$ называется устойчивым при $0 \leq t \leq T$ если выполняется условие: $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{y}(t), t) < 0$.

Областью внешняя (притяжения) корня $\bar{y}$ называется область, в которой интегральные кривые направлены к корню.



Теорема. Если $\bar{y}(t) = \bar{y}(t)$ - устойчивый корень уравнения (19), а начальное значение лежит в ее области внешней, то решение $y(t, \mu)$ задачи (17)-(18) существует на отрезке $[0, T]$ и для него имеет место

предельное соотношение $\lim_{\mu \rightarrow 0} y(t, \mu) = \bar{y}$ при $0 < t \leq T$.

Область, в которой решение задачи (17)-(18) $y(t, \mu)$ сильно отличается от решения $\bar{y} = \bar{y}$ вырожденного уравнения (19), называется пограничным слоем.

Асимптотическое представление для задачи (17)-(18) имеет вид:

$$y(t, \mu) = \bar{y}(t) + \varepsilon(t, \mu), \quad (20)$$

но в отличие от регулярного случая остаточный член $\varepsilon(t, \mu)$ уже не является равномерно малой величиной.

При достаточной гладкости правых частей можно получить асимптотическое представление для решения задачи (17)-(18) с остаточным членом $O(\mu^{k+1})$, но кроме степенных по μ регулярных членов оно будет содержать пограничные члены, зависящие от μ не степенным образом. Пограничные члены имеют граничную величину при $t=0$ и быстро убывают с ростом t :

$$y(t, \mu) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \dots + \Pi_0(\tau) + \mu \Pi_1(\tau) + \dots, \quad (21)$$

где $\tau = \frac{t}{\mu}$. Пусть

$$f = F + \mathcal{F}, \text{ где } F = f(y_0(t) + \mu y_1(t) + \dots, t),$$

$$\mathcal{F} = f(y_0(\mu\tau) + \mu y_1(\mu\tau) + \dots + \Pi_0(\tau) + \mu \Pi_1(\tau) + \dots, \mu\tau) - f(y_0(\mu\tau) + \mu y_1(\mu\tau) + \dots, \mu\tau), \quad (22)$$

$$F = F_0(t) + \mu F_1(t) + \dots; \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_0(\tau) + \mu \mathcal{F}_1(\tau) + \dots \quad (23)$$

$$(17), (23) \Rightarrow \mu \frac{dy}{dt} = F + \mathcal{F} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} (21), (23), (24) \Rightarrow \mu \frac{dy_0}{dt} + \mu^2 \frac{dy_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial \Pi_1}{\partial \tau} + \dots = \\ = F_0 + \mu F_1 + \dots + \mathcal{F}_0 + \mu \mathcal{F}_1 + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

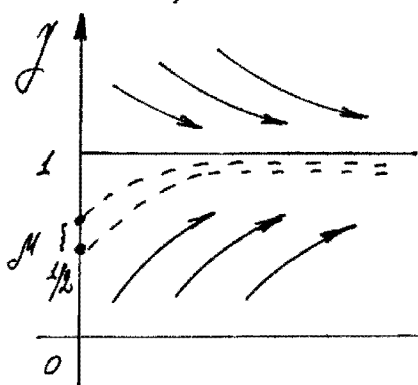
$$(25) \Rightarrow F_0(t) = f(y_0(t), t) = 0 \quad (26) \quad \frac{dy_0}{dt} = F_1(t) \quad (27)$$

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = \mathcal{F}_0(\tau) \quad (28) \quad \frac{d\Pi_1}{d\tau} = \mathcal{F}_1(\tau) \quad (29)$$

В теории сингулярных уравнений доказывается, что ряд (21) является асимптотическим рядом и имеет место оценка:

$$\left| y(t, \mu) - \sum_{i=0}^{\infty} (\mu^i y_i(t) + \mu^i \Pi_i(\frac{t}{\mu})) \right| = O(\mu^{n+1}). \quad (39)$$

Пример.



$$\left\{ \begin{aligned} \mu \frac{dy}{dt} &= y - y^2, \quad 0 < t \leq 1, \end{aligned} \right. \quad (40)$$

$$y(0) = \frac{1}{2} + \mu \quad (41)$$

$$(26) \Rightarrow y - y^2 = 0 \Rightarrow \bar{y}_1 = 0, \bar{y}_2 = 1.$$

$$f_y|_{y=1} = 1 - 2y|_{y=1} < 0 \Rightarrow \bar{y} = 1 - \text{устойчивый корень} \Rightarrow y_0(t) = 1.$$

$$(33), (34) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Pi_0}{d\tau} &= (1 + \Pi_0) - (1 + \Pi_0)^2, \quad \tau > 0, \end{aligned} \right. \quad (42)$$

$$(41) \Rightarrow y_0^* = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Pi_0(0) &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \right. \quad (43)$$

$$(42), (43) \Rightarrow \Pi_0(\tau) = -\frac{1}{1+e^\tau} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{1+e^{t/\mu}} + O(\mu). \quad (44)$$

$$(35) \Rightarrow y_1(t) = 0, \quad (41) \Rightarrow y_1^* = 1 \quad (45)$$

$$(36), (37), (45) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Pi_1}{d\tau} &= \left(1 - 2\left(1 - \frac{1}{1+e^\tau}\right)\right) \Pi_1, \quad \tau > 0, \\ \Pi_1(0) &= 1 \end{aligned} \right. \quad (46)$$

$$(47)$$

$$(46), (47) \Rightarrow$$

$$\Pi_1(\tau) = \frac{4e^\tau}{(1+e^\tau)^2} \Rightarrow$$

$$y = 1 - \frac{1}{1+e^{t/\mu}} + \mu \frac{4e^{t/\mu}}{(1+e^{t/\mu})^2} + O(\mu^2) \quad (48)$$

2. Метод ВКБ (Венцеля, Крамерса, Бриллюэна).

В квантовой механике, теории колебаний и ряде других областей встречается сингулярно возмущенное уравнение вида

$$\mu^2 y'' + Q^2(x)y = 0, \quad a < x < b, \quad (1)$$

где $Q(x) \in C^{(2)}(a, b)$. Решение уравнения (1) имеет колебательный характер, причем при малых μ частота колебаний будет очень большой, что качественно отличается от ранее рассмотренных явлений.

Сделаем замену:

$$y = \frac{Y}{\sqrt{Q}} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow Y'_x = \frac{Y'_x}{Q^{1/2}} - \frac{Y Q'}{2 Q^{3/2}} \quad (3)$$

$$Y''_{xx} = \frac{Y''_{xx}}{Q^{1/2}} - \frac{Y'_x Q'}{Q^{3/2}} - \frac{Y Q''}{2 Q^{3/2}} + \frac{3}{4} \frac{Y (Q')^2}{Q^{5/2}}$$

Перейдем к переменной t :

$$t = \frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow \mathcal{Y}_x' = \mathcal{Y}_t' \frac{Q}{\mu} ; \mathcal{Y}_{xx}'' = \mathcal{Y}_{tt}'' \frac{Q^2}{\mu^2} + \mathcal{Y}_t' \frac{Q'}{\mu} \quad (5)$$

(3), (5) $\Rightarrow$

$$\mu^2 \mathcal{Y}_{xx}'' = \left\{ \mathcal{Y}_{tt}'' - \left(\frac{\mathcal{Y} Q''}{2 Q^3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{\mathcal{Y} (Q')^2}{Q^4} \right) \mu^2 \right\} Q^{3/2} \quad (6)$$

$$(1), (6) \Rightarrow \mathcal{Y}_{tt}'' + \mathcal{Y} - \mu^2 \mathcal{P} \mathcal{Y} = 0, \quad (7)$$

где

$$\mathcal{P} = \frac{Q''}{2 Q^3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{(Q')^2}{Q^4} \text{ - непрерывная функция.}$$

Вырожденное уравнение при $\mu = 0$

$$\bar{\mathcal{Y}}_{tt}'' + \bar{\mathcal{Y}} = 0 \quad (8)$$

имеет решение

$$\bar{\mathcal{Y}} = A \sin t + B \cos t \quad (9)$$

Сравним решения $\mathcal{Y}$ и $\bar{\mathcal{Y}}$ уравнений (7) и (9), для которых $\mathcal{Y} = \bar{\mathcal{Y}}$ при $x = a$.

Для $u = \mathcal{Y} - \bar{\mathcal{Y}}$ получим уравнение

$$u'' + u = \mu^2 \mathcal{P} u + \mu^2 \mathcal{P} \bar{\mathcal{Y}}, \quad (10)$$

решение которого удовлетворяет уравнению:

$$u(t) = \mu^2 \int_0^t \sin(t-\tau) \mathcal{P}(\tau) u(\tau) d\tau + \mathcal{F}(t), \quad (11)$$

где

$$\mathcal{F}(t) = \mu^2 \int_0^t \sin(t-\tau) \mathcal{P}(\tau) \bar{\mathcal{Y}}(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Решение (11) заведомо существует и единственно при $\mu^2 t C < 1$, где $C = \sup_{x \in [a, b]} |P|$.

Положим

$$t = \frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi \leq \frac{Q_0(b-a)}{\mu}, \quad (13)$$

где $Q_0 = \sup_{x \in [a, b]} Q(x)$,

то решение (11) существует и единственно при

$$\mu < \frac{1}{C Q_0(b-a)} \quad (14)$$

При этом داریم

$$|F(t)| \leq \mu^2 t C \bar{Y}_0 \leq \mu C_1, \quad (15)$$

где $\bar{Y}_0 = \sup_{x \in [a, b]} |\bar{Y}|$.

Для $\tau_0 = \sup_{x \in [a, b]} |\tau|$ из (11) $\Rightarrow$

$$\tau_0 \leq \mu^2 t C \tau_0 + \mu C_1. \quad (16)$$

$$(16) \Rightarrow \tau_0 = O(\mu). \quad (17)$$

(2), (4), (9), (17) $\Rightarrow$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \left\{ A \sin \left(\frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi \right) + \right. \\ \left. + B \cos \left(\frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi \right) + \underline{O}(\mu) \right\} \quad (18)$$

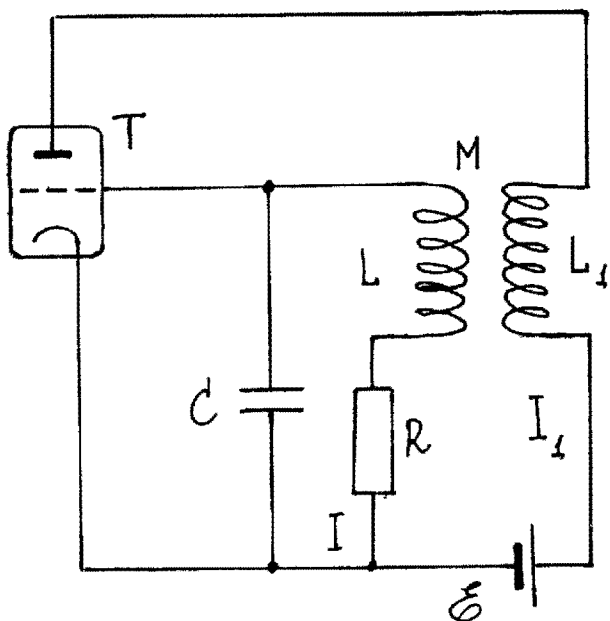
Замечание. Для уравнения

$$\mu^2 y'' - Q^2(x) y = 0, \quad a < x < b, \quad (19)$$

аналогично получаем:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \left\{ A e^{\frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi} + \right. \\ \left. + B e^{-\frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi} + \underline{O}(\mu) \right\} \quad (20)$$

3. Метод усреднения Фрумова-Боголюбова.



Рассмотрим работу лампы генератора с контуром в цепи сетки. Если бы триод T отсутствовал, то в контуре RLC могли бы возникнуть затухающие электромагнитные колебания. Однако благодаря

связи между катушками L и L_1 (M -коэффициент взаимной индукции) в системе возникают автоколебания.

Автоколебаниями называются незатухающие колебания в диссипативной нелинейной системе, которые поддерживаются за счёт внешнего источника энергии. Характерной особенностью автоколебаний является отсутствие внешнего периодического воздействия.

Для напряжений U получается дифференциальное уравнение

$$LC\ddot{U} - MS'(U)\dot{U} + RC\dot{U} + U = 0, \quad (1)$$

где $S'(U) \approx S'_0 - S'_2 U^2$ - сеточная характеристика лампы. Точка обозначает производную по времени.

Решим

$$\alpha = (MS_0 - LC) / LC, \quad \beta = MS_2 / (MS_0 - LC), \quad (2)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

$$(1), (2) \Rightarrow \ddot{U} - \alpha(1 - \beta U^2) \dot{U} + \omega_0^2 U = 0 \quad (3)$$

Введем новые переменные:

$$\tau = \omega_0 t, \quad y = \sqrt{\beta} U, \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{\omega_0} - \text{малый параметр.} \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow \ddot{y} - \varepsilon(1 - y^2) \dot{y} + y = 0 \quad (5)$$

Уравнение (5) называется уравнением Ван дер Поля.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \ddot{y} - \varepsilon(1 - y^2) \dot{y} + y = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Если искать решение задачи (6), (7) в виде

$$y(t) = \bar{y}(t) + \varepsilon y_1(t) + \dots, \quad (8)$$

то

$$\bar{y}(t) = y_0 \cos t,$$

а для $y_1(t)$ получаем резонансный случай

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + y_1 = -y_0 \left(1 - \frac{y_0^2}{4}\right) \sin t + \frac{y_0^3}{4} \sin 3t, & t > 0, \\ y_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \end{cases}$$

и решение неограниченно возрастает по времени:

$$y_1(t) = \frac{y_0}{2} \left(1 - \frac{y_0^2}{4}\right) t \cos t - \frac{y_0^3}{32} \sin 3t - \\ - \frac{y_0}{8} \left(1 - \frac{11}{16} y_0^2\right) \sin t.$$

Для решения задачи (6), (7) используем метод А. Н. Кримова - Н. Н. Боголюбова (1937г.).

Этот метод основан на принципе усреднения, заменив точное решение дифференциального уравнения усредненным. Он особенно удобен для исследования нелинейных колебательных процессов.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (9)$$

где ε - малый параметр. Пусть X - достаточно гладкая функция по x и t и обладает свойством "возвратности" по t , т.е. существует среднее значение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(x, t) dt = \bar{X}(x), \quad (10)$$

например, X периодическая или почти периодическая функция t . Если X периодическая с периодом 2π по t функции, то (10) $\Rightarrow$

$$\bar{X}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(x, t) dt. \quad (11)$$

Согласно методу Кримова - Боголюбова, т.е. приближение к решению $x(t)$ системы (9) имеет вид:

$$x = \xi + \varepsilon u_1(\xi, t) + \dots + \varepsilon^m u_m(\xi, t), \quad (18)$$

где $\xi = \xi(t)$ - решение усредненного уравнения

$$\dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \dots + \varepsilon^m A_m(\xi), \quad (19)$$

где функции $u_i(\xi, t)$ и $A_i(\xi)$ подбираются из того условия, чтобы выражение (18) удовлетворяло уравнению (9) с точностью до членов порядка ε^{m+1} и чтобы $u_i(\xi, t)$ обладали по t той же "возвращаемостью", что и $X(x, t)$. Функции u_i находятся элементарно, а функции A_i определяются в результате усреднения правой части системы (9) после подстановки в неё выражения (18).

Замечание. При вычислении интегралов (10) и (11) x рассматривается как параметр и усреднение происходит по явно вводимому t .

Разложим правую часть (9) по ε :

$$X(x, t) = X_1(x, t) + \varepsilon X_2(x, t) + \dots \quad (14)$$

Первое приближение:

$$x_1 = \xi \quad (15)$$

$$\dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi) \quad (16)$$

Подставим (14) в (9) и учтем члены первого порядка:

$$\dot{x}_1 = \dot{\xi} + \varepsilon \frac{d u_1}{dt} = \varepsilon X_1, \quad (17)$$

где $\frac{d u_1}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon A_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi}$ (18)

Используя члены первого порядка (16)-(18) $\Rightarrow$

$$A_1(\xi) + \frac{\partial u_1}{\partial t} = X_1(\xi, t). \quad (19)$$

Положим $A_1(\xi) = \bar{X}_1(\xi)$ (20)

(19), (20) $\Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial t} = X_1(\xi, t) - \bar{X}_1(\xi)$ (21)

Второе приближение:

$$x_2 = \xi + \varepsilon u_1(\xi, t) \quad (22)$$

$$\dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) \quad (23)$$

Подставим (22) в (9) и учтем (23). Используя члены второго порядка и формулу (22), получим:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + A_2(\xi) = F(\xi, t), \quad (24)$$

где $F(\xi, t) = X_2(\xi, t) + \frac{\partial X_1}{\partial \xi}(\xi, t) u_1(\xi, t) - A_1(\xi) \frac{\partial u_1}{\partial \xi}(\xi, t)$ (25)

Положим

$$A_2(\xi) = \bar{F}(\xi) \quad (26)$$

$$(24)-(26) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial t} = \mathcal{F}(\xi, t) - \bar{\mathcal{F}}(\xi) \quad (27)$$

Этот процесс можно продолжить, но обычно ограничиваются одним-двумя приближениями, так как быстро возрастает сложность вычисления $\mathcal{F}$.

В теории метода Гурьева-Боголюбова доказывается, что если $X(x, t)$ обладает неограниченной гладкостью и "возвращающей" (например периодичностью) по t при фиксированном x , то $x - x_m = O(\varepsilon^m)$ на участке $0 \leq t \leq O(\frac{1}{\varepsilon})$.

Запишем уравнение (6) в виде системы и поставим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{y} = u, \\ \dot{u} = \varepsilon(1-y^2)u - y, \end{cases} \quad \begin{matrix} y(0) = y_0, \\ u(0) = 0 \end{matrix} \quad (28)$$

Будем искать решение системы (28) в виде

$$\begin{aligned} y &= a \cdot \cos(t + \theta), \\ u &= -a \cdot \sin(t + \theta), \end{aligned} \quad (29)$$

где a и θ - функции t .

(28), (29) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon \left\{ \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) - \frac{a}{2} \cos 2(t+\theta) + \frac{a^3}{8} \cos 4(t+\theta) \right\}, \\ \dot{\theta} = \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{2} \right) \sin 2(t+\theta) - \frac{a^2}{8} \sin 4(t+\theta) \right\}, \\ a(0) = y_0, \quad \theta(0) = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Система (30) совпадает с (9), если положить

$$x = (a, \theta)^T, \quad X(x, t) = X_1(x, t).$$

Обозначим также $\xi = (\bar{a}, \bar{\theta})^T$.

Первое приближение:

$$\dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi), \quad A_1(\xi) = \bar{X}_1(\xi),$$

$$\bar{X}_1(\xi) = \left(\frac{\bar{a}}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}^2}{4} \right), 0 \right)^T \Rightarrow$$

$$\left(\dot{\bar{a}}, \dot{\bar{\theta}} \right)^T = \varepsilon \left(\frac{\bar{a}}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}^2}{4} \right), 0 \right)^T \Rightarrow$$

усредненная система имеет вид:

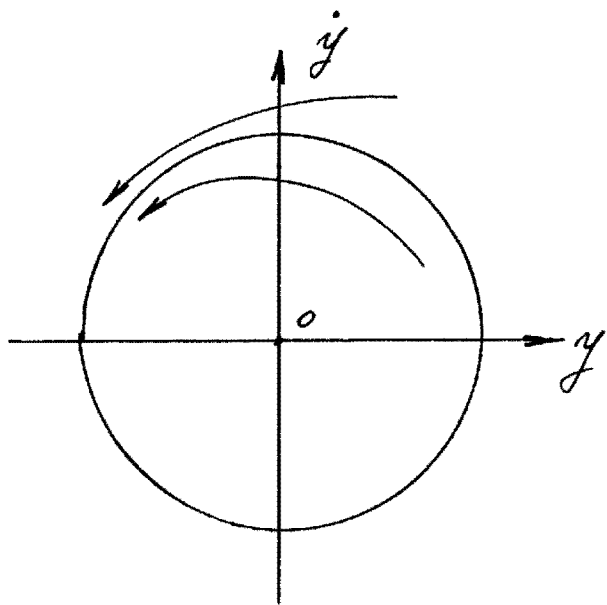
$$\begin{cases} \dot{\bar{a}} = \varepsilon X(\bar{a}) = \varepsilon \frac{\bar{a}}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}^2}{4} \right), & \bar{a}(0) = y_0, & (31) \\ \dot{\bar{\theta}} = 0, & \bar{\theta}(0) = 0 & (32) \end{cases}$$

Положив $x_1 = \xi$, получим:

$$a = \frac{2y_0}{\sqrt{y_0^2 + (4 - y_0^2)e^{-\varepsilon t}}}, \quad \theta = 0 \quad (33)$$

При $t \rightarrow \infty$ решение выходит на стационарный режим: $y(t) = 2 \cos t$.

На фазовой плоскости $(y, \dot{y})$ автоколебаниям соответствует предельный цикл — замкнутая траектория, на которую настраиваются все фазовые траектории из некоторой окрестности. Множество, к которому сходится фазовые кривые, называется аттрактором.



В рассматриваемом случае аттрактором является окружность радиуса 2.

Точки покоя уравнения (31) $\bar{a} = 0$ и $\bar{a} = 2$. Первый корень неустойчивый: $\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{a}}(0) > 0$, а

второй - устойчивый:

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{a}}(2) < 0.$$

Уравнение (21) принимает вид:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{a}}{2} \cos 2/(t+\bar{\theta}) + \frac{\bar{a}^3}{8} \cos 4/(t+\bar{\theta}) \\ \frac{1}{2} (1 - \frac{\bar{a}^2}{2}) \sin 2/(t+\bar{\theta}) - \frac{\bar{a}^2}{8} \sin 4/(t+\bar{\theta}) \end{bmatrix} = X(\xi, t) - \bar{X}(\xi) \quad (34)$$

Второе приближение: $x_2 = \xi + \varepsilon u_1(\xi, t)$

Средняя система: (23), (25), (26) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}} = \varepsilon \frac{\bar{a}}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}^2}{4} \right), \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{\theta}} = -\varepsilon^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{\bar{a}^2}{8} + \frac{7\bar{a}^4}{256} \right) \end{cases} \quad (36)$$

Уравнение (35) совпадает с (31) $\Rightarrow$ при $t \rightarrow \infty$ $\bar{a} \rightarrow 2$. При этом $\dot{\bar{\theta}} = -\frac{\varepsilon^2}{16}$, следовательно, $\bar{\theta} \rightarrow -\frac{\varepsilon^2}{16} t + \theta_0$.

Второе приближение имеет вид:

$$a = \bar{a} + \varepsilon \left(\frac{\bar{a}^3}{32} \sin 4(t + \bar{\theta}) - \frac{\bar{a}}{4} \sin 2(t + \bar{\theta}) \right), \quad (37)$$

$$\theta = \bar{\theta} + \varepsilon \left(\frac{\bar{a}^2}{32} \cos 4(t + \bar{\theta}) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\bar{a}^2}{4} \right) \cos 2(t + \bar{\theta}) \right),$$

где $\bar{a}$ и $\bar{\theta}$ определяются из (35), (36).

Для стационарного решения получим
 $(\bar{a} = 2, \bar{\theta} = -\frac{\varepsilon^2}{16}t + \theta_0)$:

$$a_{ст.} = 2 - \frac{\varepsilon}{2} \sin 2(\omega t + \theta_0) + \frac{\varepsilon}{4} \sin 4(\omega t + \theta_0),$$

$$\begin{aligned} \theta_{ст.} = & \left(\theta_0 - \frac{\varepsilon^2}{16}t \right) + \frac{\varepsilon}{4} \cos 4(\omega t + \theta_0) + \\ & + \frac{\varepsilon}{8} \cos 4(\omega t + \theta_0), \end{aligned} \quad (38)$$

где $\omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}$.

Подставив (38) в формулу

$$y(t) = a_{ст.} \cos(t + \theta_{ст.})$$

и удерживая члены порядка ε , получим второе приближенное стационарное колебательное решение уравнения Ван дер Поля:

$$y(t) = 2 \cos(\omega t + \theta_0) - \frac{\varepsilon}{4} \sin 3(\omega t + \theta_0) \quad (39)$$

На фазовой плоскости траектории второго приближения отклоняется от окружности на величину порядка ε .

Гл. V. Некоторые новые методы и объекты математического моделирования.

§1. Фракталы и фрактальные структуры.

Фрактал - это геометрическая фигура, в которой один и тот же фрагмент повторяется при каждом уменьшении масштаба.

1. Фракталы в математике.

В 1883 году Георг Кантор описал множество, которое теперь называют множеством Кантора или пылью Кантора. Это множество имеет мощность континуума, но мера его равна нулю. Каждая из фрагментов в множестве Кантора выглядит, как всё множество в целом, но это оно самоподобно.

В 1886 году Карл Вейерштрасс построил функцию, не имеющую производную ни в одной точке

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \cos(B^n \pi x),$$

где $0 < A < 1$. График этой функции - бесконечно изломанная линия. При увеличении любой участок кривой выглядит подобно всей кривой.

В 1904 году Лале фон Нова построил пример непрерывной кривой, которая нигде не имеет касательной. Можно построить сложившую или остров Нова, если в качестве начального объекта взять равнобедренный треугольник, а не единичный отрезок.

Сложившие или остров Нова будут иметь бесконечной периметр, но при этом будут ограничивать конечную область.

В 1915 году Вацлав Серпинский построил ряд конструкций, в частности, самфетну Серпинского. Если в качестве начального объекта взять не равносторонний треугольник, а квадрат, то получим ковёр Серпинского. Можно построить различные аналоги этих объектов. Они называются убоками.

Рассмотренные объекты называются конструктивными фракталами. Они получаются в результате простой рекурсивной процедуры (комбинирования линейных преобразований).

Динамические фракталы. В 1918 году Гастон Мюшса и Пьер Фату использовали свойство отображения

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C \quad (1)$$

на комплексной плоскости. При фиксированном C в зависимости от выбора начального приближения предельное поведеньность будут либо ноль (аттрактор), либо бесконечность (аттрактор)

Граница, разделяющая области притяжения этих двух аттракторов бесконечно изрезана и является фракталом - множеством Мюшса.

С помощью (1) Бенуа Мандельброт прослеживал судьбу фиксированной точки z при разложении:

- а) последовательность приближалась к нулю (аттрактор),
- б) последовательность приближалась к бесконечности (аттрактор),
- в) специфический случай: последовательность уходит на границу двух областей притяжения.

Эта граница имеет фрактальную структуру и является странным аттрактором для данного процесса. Фигура, ограниченная данной границей, называется множеством Мандельброта.

2. Размерность самоподобия.

Единичный отрезок, N частей длины $\ell = \frac{1}{N} \Rightarrow$
 $1 = N\ell.$

Единичный квадрат, N квадратов со стороной $\ell = \frac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow 1 = N\ell^2.$

Единичный куб, N кубов со стороной $\ell = \frac{1}{\sqrt[3]{N}} \Rightarrow$
 $1 = N\ell^3.$

Во всех этих случаях получаем $N\ell^d = 1$,
где d - размерность самоподобия:

$$d = - \frac{\ln N}{\ln \ell}. \quad (2)$$

Чтобы построить множество Кантора нужно взять два множества длины $\frac{1}{3} \Rightarrow$

$$d = - \frac{\ln 2}{\ln 1/3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309 -$$

уже не отрезок, но ещё не точка.

Одна самфетка Серпинского состоит из трёх самфеток с размером стороны $\frac{1}{3} \Rightarrow$

$$d = - \frac{\ln 3}{\ln 1/2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5850 -$$

уже не фигура, но ещё не отрезок.

Для кривой Коха требуется четыре отрезка длиной $\frac{1}{3} \Rightarrow$

$$d = - \frac{\ln 4}{\ln 1/3} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618.$$

3. Фракталы в природе.

Б. Мандельброт. Фрактальная геометрия природы (1982).

Регулярные фракталы: на каждом этапе масштабирования в точности повторяются детали в целом.

Нерегулярные фракталы: на каждом уровне масштаба структура фрактала подобна, но не идентична объекту в целом.

Природные фракталы: деревья, реки, облака, береговая линия.

Человеческий организм: структура дыхательной, кровеносной и нервной систем, увеличение структуры костей, нейронов (нервные клетки), фрактальной ответвленности и складки поверхности кишечника.

4. Моделирование дендритов.

Дендритное (древовидное фрактальное): кристаллическое, мохноватое, трещиноватое, радиальное.

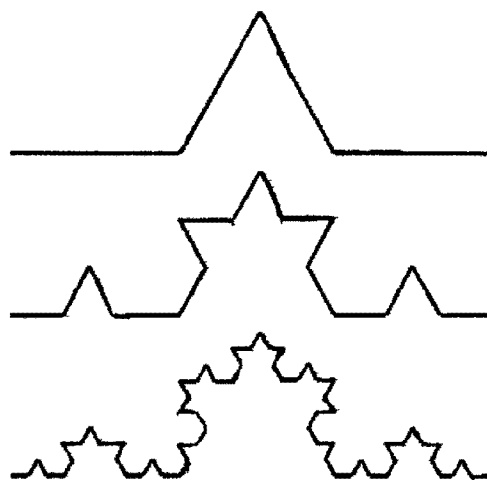
Модель ОДА - ограниченная диффузией агрегация: случайное движение молекул, которые могут слипаться, образуя кластер.

а) Случайная частица движется случайным образом с окружностью круга, в центре которого расположена затравка, достигнув которой, частица сливается с ней. В результате получается "дендритный кристалл".

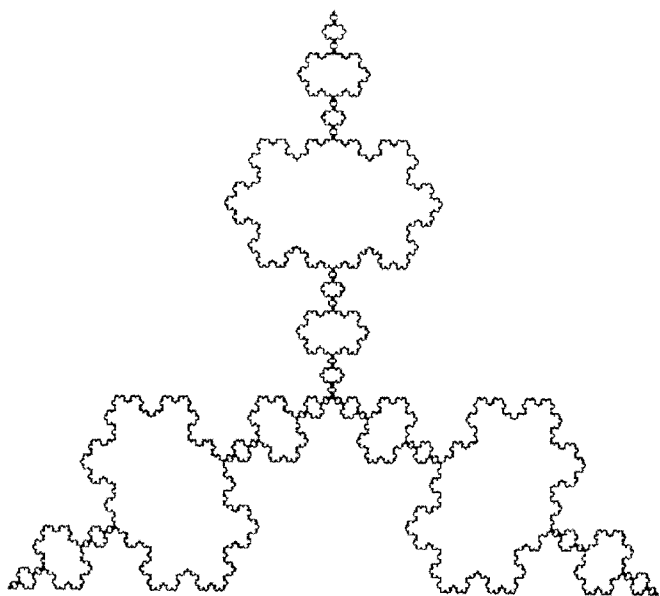
б) Случайная частица движется случайным образом с равной вероятностью прямоугольника. При достижении боковой грани она упруго отражается, а при достижении нижней грани испаряется. В результате образуются "фрактальные водоросли".



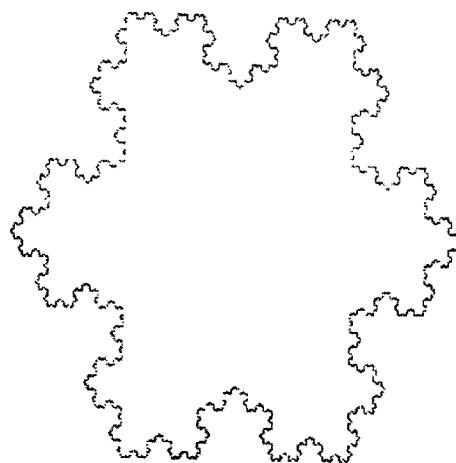
Построение множества
Кантора.



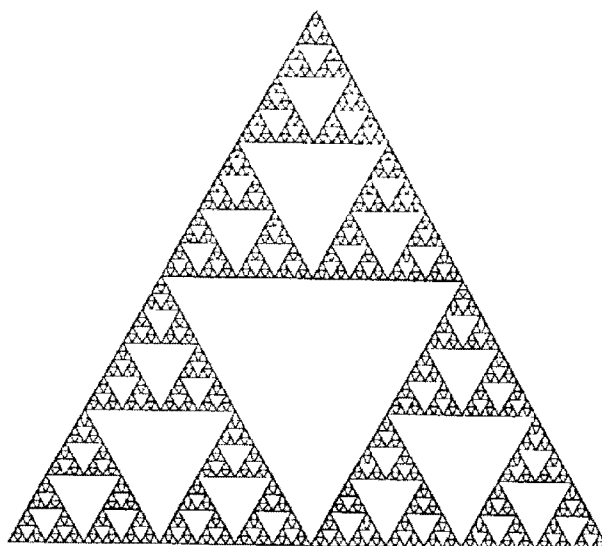
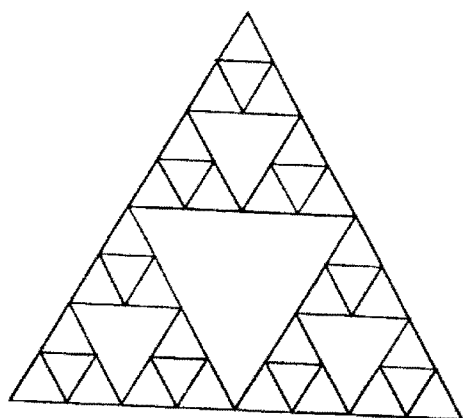
Построение дуги Коха.



Сторона Коха, ориентиро-
ванная внутрь треугольника.



Сторона Коха

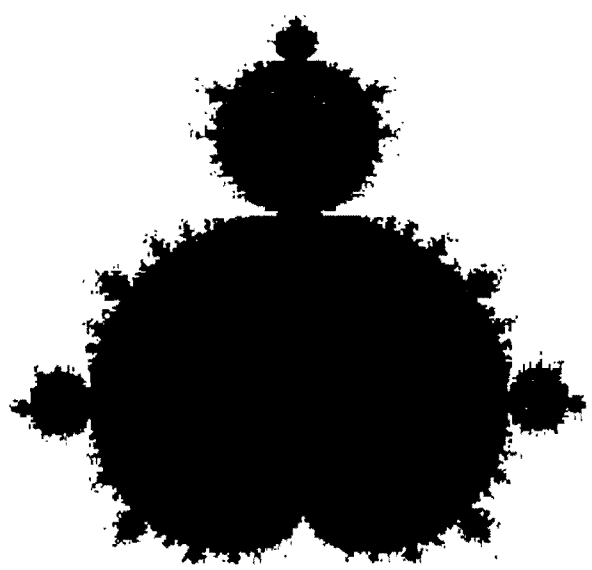


Построение сифонки Серпинского.

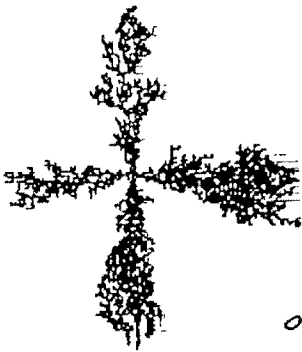


Множество Жюлиа при

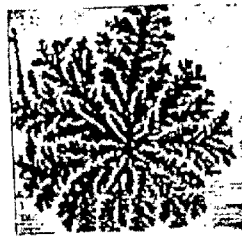
$$c = 0.27334 + i 0.00742$$



Множество Мандельброта



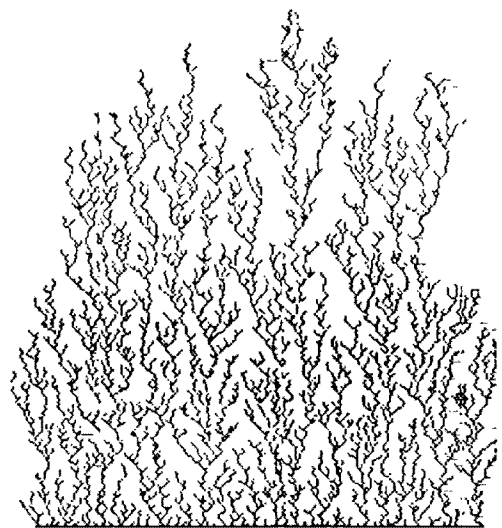
a)



б)

a) Дендрит, полученный по методу О.С.А.

б) Реальный кристалл в виде дендрита.



"Фрактальная водоросль."

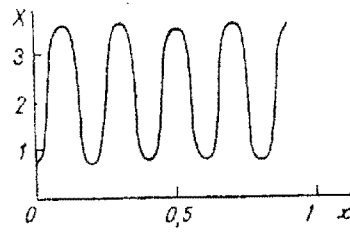
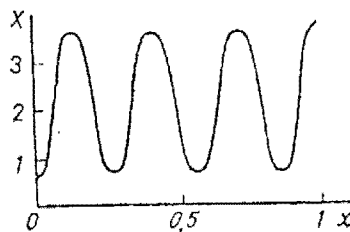


Рис. 3.2 Распределение концентрации X . Два различных типа структур, возможных в одной и той же нелинейной среде ($A=2$, $B=4,6$, $D_1=1,6 \cdot 10^{-3}$; $D_2=8,0 \cdot 10^{-3}$) при задании различных начальных данных

§ 2. Саморганизация и образование структур.

Синергетика.

1. Диссипативные структуры.

Рассмотрим распределенные системы, в которых в результате развития неустойчивости в однородной диссипативной среде могут возникать устойчивые пространственно-неоднородные структуры. Такие структуры называются диссипативными. Основы их теории заложены в 1952 году Алан М. Тьюрингом, а сам термин предложен Н. Р. Пригожиным.

Общим условием развития процессов саморганизации (самопроизвольного возникновения волн и структур) является наличие неустойчивости, возникающей, если отклонение от состояния равновесия превышает критическое.

Диссипативная структура поддерживается за счёт постоянного притока энергии и вещества - открытые системы.

Уравнения, описывающие процессы в системе, должны быть нелинейными.

Процессы в среде должны протекать согласованно.

Синергетика изучает процессы образования структур в сложных самоорганизующихся системах.

2. Модель Гроссмантофа.

Базовая модель симметрии, предложенная в 1968 году Гроссмантом и Лернером. Позволяет выявить условия возникновения типов самоорганизации в химических и биологических системах.

Представляет собой схему кинетических химических реакций, происходящих в тонком и длинном (одномерном) сосуде-реакторе длиной l .

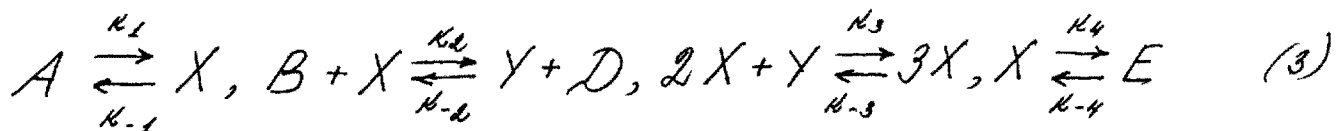
Закон действующих масс:

$$X + Y \rightarrow Z \Rightarrow \frac{d\tilde{Z}}{dt} = \kappa \tilde{X} \tilde{Y}, \quad (1)$$

где κ - постоянная реакции, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ - концентрации.

$$nX + Y \rightarrow Z \Rightarrow \frac{d\tilde{Z}}{dt} = \kappa \tilde{X}^n \tilde{Y} \quad (2)$$

Схема реакции:



$\tilde{A} = \text{const}$, $\tilde{B} = \text{const}$, концентрации X и Y остаются в реакторе, концентрации D и E удаляются (система открытая), $\kappa_{-i} \ll \kappa_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$(1)-(3) \Rightarrow \tilde{X}_t = \kappa_1 \tilde{A} - (\kappa_2 \tilde{B} + \kappa_4) \tilde{X} + \kappa_3 \tilde{X}^2 \tilde{Y} + D_1 \tilde{X}_{xx}, \quad (4)$$

$$\tilde{Y}_t = \kappa_2 \tilde{B} \tilde{X} - \kappa_3 \tilde{X}^2 \tilde{Y} + D_2 \tilde{Y}_{xx}, \quad (5)$$

где D_1 и D_2 - коэффициенты диффузии.

Замена переменных: $\kappa_4 t \rightarrow t$, $X = (\kappa_3/\kappa_4)^{1/2} \tilde{X}$,

$$Y = (\kappa_3/\kappa_4)^{1/2} \tilde{Y}, \quad A = (\kappa_1^2 \kappa_3/\kappa_4^3) \tilde{A}, \quad B = \tilde{B} \kappa_2/\kappa_4,$$

$$D_1 = \tilde{D}_1/\kappa_4, \quad D_2 = \tilde{D}_2/\kappa_4. \quad (6)$$

$$(4)-(6) \Rightarrow \begin{cases} X_t = A - (B+1)X + X^2 Y + D_1 X_{xx}, & (7) \\ Y_t = BX - X^2 Y + D_2 Y_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0, & (8) \\ X(x, 0) = X_0(x), \quad Y(x, 0) = Y_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, & (9) \\ 0 = X_x(0, t) = X_x(l, t), \quad Y_x(0, t) = Y_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0. & (10) \end{cases}$$

Начально-краевая задача (7)-(10) является задачей Брюсселятора.

Ищем стационарные однородные по пространству решения: (7), (8) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} A - (B+1)X + X^2 Y = 0, & (11) \\ BX - X^2 Y = 0. & (12) \end{cases}$$

Единственное решение

$$X = A, \quad Y = B/A. \quad (13)$$

Будем считать $X_0(x)$, $Y_0(x)$ и B . Если B не-
мал, то независимо от начальных данных через опре-
деленное время установится концентрация

$$X(x, t) = A, \quad Y(x, t) = B/A. \quad (14)$$

Учитывая стационарные решения, на которое независимо от начальных данных влияют разбегшиеся параметры при больших внешних воздействиях, получаем периодическую ветвь.

Зафиксируем $X_0(x)$ и $Y_0(x)$ и будем увеличивать B . Начиная с критического B_c происходит выход на немонокотонные стационарные распределения концентраций, возникающие вне термодинамической ветви и называемые присоединенными диссипативными структурами.

Стационарные решения (13) удовлетворяют задаче при любых B . При $B > B_c$ появляются несколько стационарных решений, т.е. происходит ветвление решений или бифуркация.

Зафиксируем $B > B_c$ и будем менять $X_0(x), Y_0(x)$. При некоторых значениях B в разных классах начальных данных в одной и той же нелинейной среде происходит выход на разные стационары.

Причиной возникновения структур являются внутренние свойства системы, а поведением - внешние флуктуации. Для учета флуктуаций в правых частях (7) и (8) добавим стохастические функции.

Резонансные воздействия на систему в окрестности B_c : слабые воздействия вызывают сильный эффект.

Определение B_c . Линеаризуем уравнения (7), (8):

$$X = A + \bar{X}, \quad Y = B/A + \bar{Y}, \quad (15)$$

где $|\bar{X}| \ll A, |\bar{Y}| \ll B/A$.

Подставим (15) в (7), (8) и отбросим члены второго порядка и выше.

$$\begin{cases} \bar{X}_t = (B-1)\bar{X} + A^2\bar{Y} + D_1\bar{X}_{xx}, & (16) \\ \bar{Y}_t = -B\bar{X} - A^2\bar{Y} + D_2\bar{Y}_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, & (17) \\ \bar{X}(x, 0) = X_0(x) - A, \bar{Y}(x, 0) = Y_0(x) - B/A, & 0 \leq x \leq l, & (18) \\ \bar{X}_x(0, t) = \bar{X}_x(l, t) = 0, \bar{Y}_x(0, t) = \bar{Y}_x(l, t) = 0, & t \geq 0. & (19) \end{cases}$$

Найдём частные решения вида $g(t) \cdot f(x)$:

$$\bar{X}_m = p_m e^{\lambda_m t} \cos \frac{\pi m x}{l}, \quad (20)$$

$$\bar{Y}_m = q_m e^{\lambda_m t} \cos \frac{\pi m x}{l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

(16), (17), (20) для $\lambda = \lambda_m \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda [A^2 - B + 1 + (D_1 + D_2)(m^2 \pi^2 / l^2)] + \\ + [A^2 B - (A^2 + D_2 m^2 \pi^2 / l^2)(B - 1 - D_1 m^2 \pi^2 / l^2)] = 0, \\ m = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Если $\operatorname{Re} \lambda_{m_1} < 0$, $\operatorname{Re} \lambda_{m_2} < 0$ для всех m , то периодическая ветвь (14) устойчива (малые B).

Если при $B = B_c$ $\lambda_{m_1} = 0$, $\lambda_{m_2} < 0$, то при $B > B_c$ возникают ветви неустойчивости.

Если при $B = B_c$ для некоторого m $\operatorname{Re} \lambda_{m_1} = \operatorname{Re} \lambda_{m_2} = 0$, $\operatorname{Im} \lambda_{m_1} = -\operatorname{Im} \lambda_{m_2}$, то функции $\bar{X}_m$ и $\bar{Y}_m$ периодические и в системе возникают колебания (обычно $D_1 \approx D_2$).